УДК 539.377

З.С.Бережанська, І.Б.Прокопович

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ТРІЩИНАМИ

Пропонуємо алгоритм розв"язування просторової задачі теплопровідності для середовища з щілинами методом інтегральних рівнянь. За допомогою теплового потенціалу простого шару задача зводиться до розв"язування інтегрального рівняння першого роду з невідомою густиною джерел. На кожному кроці по часу густина вважається лінійною функцією змінної часу, а по просторових координатах апроксимується лінійною комбінацією дробово-раціональних функцій з невідомими коефіцієнтами [3]. Останні визначаються послідовним розв"язуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які відрізняються лише правими частинами.

Нехай у деякому тривимірному середовищі, що знаходиться попередньо при нульовій температурі, розташована система $S=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$ тонких скінченних розімкнутих поверхонь, рівняння яких зображені у вигляді

$$x_j^{(i)}=f_j^{(i)}(\alpha),\quad i=(\overline{1,m}),\quad j=(\overline{1,3}),\quad \alpha=(\alpha^1,\alpha^2).$$

Потрібно визначити функцію $T(x,\tau)$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}=\nabla^2 T(x,\tau) \qquad /1/$$

у просторі R^3, початкову $T(x,0)=0$ і граничну умову на поверхні S

$$T(x,\tau)\Big|_S=\psi(x,\tau)S_+(\tau),\quad S_+(\tau)=\begin{cases}1, & \tau>0\\ 0, & \tau\leq 0.\end{cases} \qquad /2/$$

Розв"язок задачі /1/ – /2/ зобразимо у вигляді теплового потенціалу простого шару

$$T(\bar{x},t)=\int_0^t d\tau\iint_S Q(\alpha,\tau)\,\delta(r,\tau,t)\,ds,\ \bar{x}\in R^3, \qquad /3/$$

де $\delta(r,\tau,t)=\frac{1}{2^3\pi^{3/2}}\exp[-r^2/4(t-\tau)]/(t-\tau)^{3/2}$ – функція впливу теплового джерела; $r=\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2}$ – відстань між біжучою точкою x на поверхні S і фіксованою точкою $\bar{x}$ простору; $Q(s,\tau)$ – поверхнева густина джерел, яка є розв"язком інтегрального рівняння

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_0^t d\tau \iint_{S_i} Q^{(i)}(s_i\tau)\,\delta(r,\tau,t)\,ds=\psi^{(i)}(\bar{x},t),\ \bar{x}\in S.\right. \qquad /4/$$

Розіб"ємо проміжок часу $(0,t)$ на $n-1$ частин точками $t_1=0, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n=t$ і на кожному відрізку часу $t_{k-1}\leq t\leq t_k$ невідому густину зобразимо у вигляді кусково-неперервної функції

$$Q^{(i)}(\alpha,\tau)=Q^{(i)}_{k-1}(\alpha,\tau)=q^{(i)}_{k-1}(\alpha)\frac{t_k-\tau}{t_k-t_{k-1}}+q^{(i)}_k(\alpha)\frac{\tau-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}. \qquad /5/$$

Тут невідомі функції $q^{(i)}(\alpha)$ вибираються у вигляді [3]

$$q^{(i)}_k(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{L^{(i)}}\frac{a^{(i)}_{\nu,k}\,b^{(i)}_{\nu,k}}{[b^{(i)}_{\nu,k}]^2+(\alpha^1-\alpha^{1(i)}_\nu)^2+(\alpha^2-\alpha^{2(i)}_\nu)^2}. \qquad /6/$$

Враховуючи /5/, після деяких перетворень отримаємо наближений аналог інтегрального рівняння /4/

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\iint_{\Delta i}F^{(i)}(\alpha)\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}Q^{(i)}_{n-1}(\alpha,\tau)\,\delta(r,t_n,\tau)\,d\tau\right]d\alpha^1 d\alpha^2+\sum_{k=2}^{n-1}R^{(i)}_{k-1}(Q_{k-1},t_n)\right\}=\psi^{(i)}(\bar{x},t),\ \bar{x}\in S, \qquad /7/$$

де $F^{(i)}(\alpha)$ – Якобіан переходу від координат x до координат α;

$$R^{(i)}_{k-1}(Q^{(i)}_{k-1},t_n)=\iint_{\Delta i}F(\alpha)\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}Q_{k-1}(\alpha,\tau)\,\delta(r(\alpha),t_n,\tau)\,d\tau\right]d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Будемо вважати, що $t_k-t_{k-1}=h\ (k=\overline{2,n})$. Обчисливши у рівнянні /7/ інтеграли, які залежать від часу, отримаємо

$$1/2^3\pi\sum_{i=1}^{m}\iint_{\Delta i}q^{(i)}_n(\alpha)F^{(i)}(\alpha)\nabla^2_{-1}P\,d\alpha^1 d\alpha^2=\psi^{(i)}(\bar{x},t)- \qquad /8/$$

$$-1/2^3\pi\sum_{i=1}^{m}\iint_{\Delta i}\sum_{k=2}^{n-1}q^{(i)}_k(\alpha)F^{(i)}(\alpha)\nabla^2_j P\,d\alpha^1 d\alpha^2,$$

де $j=n-k-1$; $\nabla^2_j P$ – скінченна різниця другого порядку функції P;

$\nabla^2_j P=\nabla^2_j U-\nabla^2_j V;\quad \nabla^2_j U=\nabla^2_j(CA);\quad \nabla^2_j V=r/h\,\nabla^2_j E;$

$A=erfc(\theta)=2/\sqrt{\pi}\int_\theta^\infty e^{-\theta^2}d\theta;\quad c=r/h+2j/r;\quad E=1/\sqrt{\pi}\,e^{-\theta^2}/\theta;\quad \theta=r/2\sqrt{jh};$

$A_{-1}=A_0=E_{-1}=E_0=0.$

Рівняння /8/ використовується для визначення невідомих функцій $q^{(i)}_n(\alpha)$, якщо $q^{(i)}_k(\alpha)$ знайдені на попередніх кроках. Підставляючи /6/ у /8/ і застосовуючи метод колокації у точках, отримуємо для визначення невідомих $a_{ij,k}^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої формується тільки один раз для всіх моментів часу t_k .

Підінтегральна функція має особливість, якщо точка інтегрування збігається з точкою колокації. Ця особливість усувається спеціальним вибором точок інтегрування і точок колокації [I]. Для обчислення подвійних інтегралів використовуємо методику праці [2] .

Температурне поле у довільній точці $\bar{x}$ середовища знаходимо за формулою

$$T(\bar{x}, t_n) = 1/2^3\pi \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Delta_l} F^{(i)}(\alpha) \sum_{k=2}^{n} q_k^{(i)}(\alpha) \nabla_j^2 \rho \, d\alpha^1 d\alpha^2 .$$

Для реалізації цього методу складена типова програма на алгоритмічній мові ФОРТРАН. Програма визначає невідомі густини, температуру в довільній точці і перевіряє задоволення граничних умов у проміжних точках, що дає змогу судити про точність розв"язку поставленої задачі. При звертанні до програми необхідно задавати значення температури і геометрію щілин, які можуть бути площинами і поверхнями другого порядку.

Приклад. Розглянемо задачу про тепловий удар для простору з циліндричною тріщиною /рис.I/.

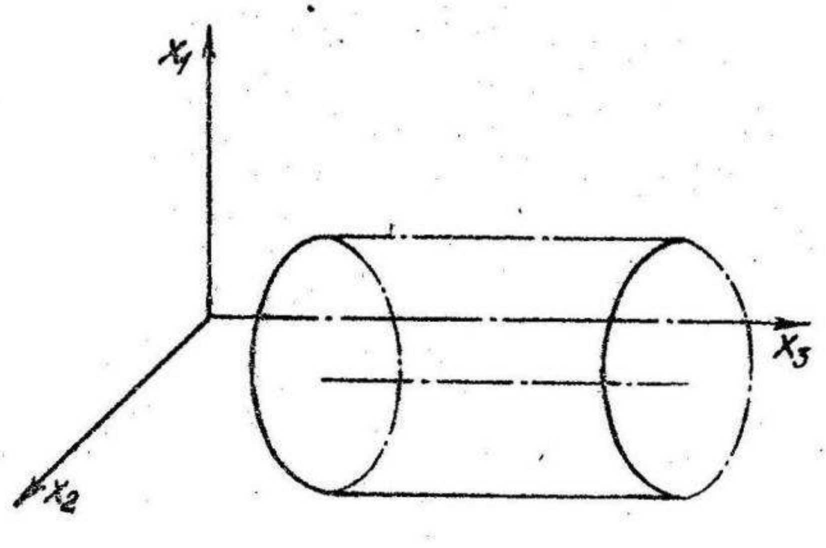

Рис.I.

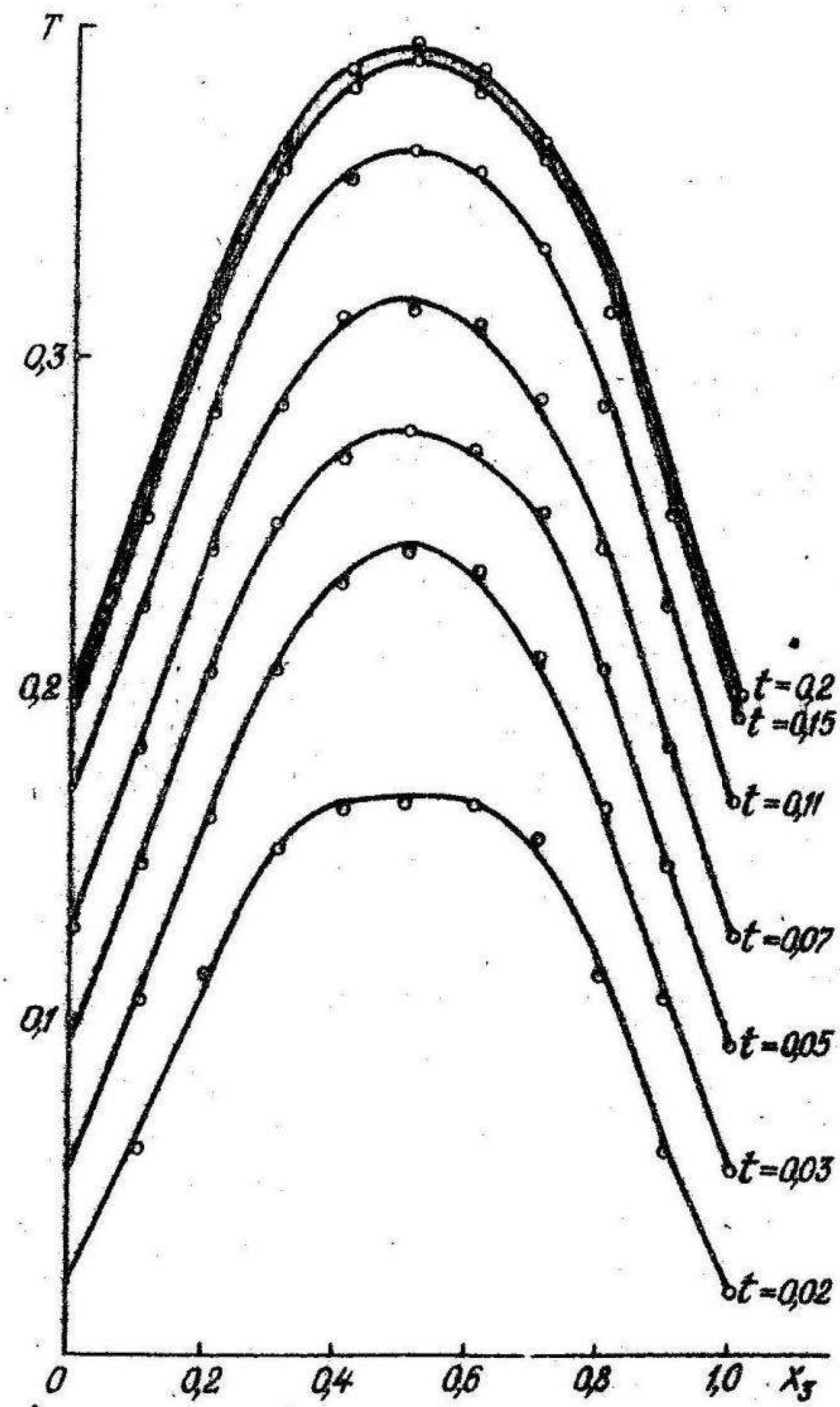

Рис. 2.

Температура середовища і тріщини вважається нульовою. У початковий момент часу температура тріщини миттєво встановлюється рівною $\psi(x,\tau)=\begin{cases}1, & \tau>0\\ 0, & \tau\leqslant 0\end{cases}$ і постійно підтримується при цих значеннях. Температурне поле зовні тріщини описується рівнянням /I/. Розв"язок задачі здійснено на ЕОМ БЕСМ-6 при таких розмірах тріщини

$$S = \begin{cases} x_1 = 0{,}204\cos\alpha^1 + 0{,}3 & 0 \leq \alpha^1 \leq 2\pi, \\ x_2 = 0{,}196\sin\alpha^1 + 0{,}3 & 0{,}2 \leq \alpha^2 \leq 0{,}8, \\ x_3 = \alpha^2. \end{cases}$$

На рис. 2 зображено графік зміни температури вздовж осі OX_3 у різні фіксовані моменти часу. При $t \to \infty$ нестаціонарний розв"язок повинен прямувати до стаціонарного, що і отримано при розрахунку.

Список літератури: I. Безлюдный Е.Е., Ракова Л.В. Склепус Н.Г. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Л.Рвачева. - Известия АН БССР, сер. ФМН, 1969, вып. I. 2. Бережанська З.С., Гордійчук В.I. Чисельний розв"язок інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду в R^3. - Вісн.Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип.13. 3. Гордійчук В.И. Численное решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в R^3. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып. 33.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін, О.Є.Кірік

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ БОГОЛЮБОВА-КРИЛОВА

У техніці широко застосовуються конструкції, що містять тонкі металічні смужки, пластини та незамкнуті оболонки. При дослідженні електричних полів, які створюються ними, зручно вважати такі пластини та оболонки нескінченно тонкими, що приводить до необхідності визначати розподіл заряду по незамкнутих провідних поверхнях. Ця задача формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [2]

$$\iint\limits_S \frac{\sigma(M)}{R(Q,M)}\, dS_M = U(Q), \qquad /I/$$

де $\sigma(M)$ - шукана густина розподілу заряду по S; $R(Q,M)$ - від-