ратурне поле зовні тріщини описується рівнянням /I/. Розв"язок задачі здійснено на ЕОМ БЕСМ-6 при таких розмірах тріщини

$$S = \begin{cases} x_1 = 0{,}204 \cos\alpha^1 + 0{,}3 & 0 \leq \alpha^1 \leq 2\pi, \\ x_2 = 0{,}196 \sin\alpha^1 + 0{,}3 & 0{,}2 \leq \alpha^2 \leq 0{,}8, \\ x_3 = \alpha^2. \end{cases}$$

На рис. 2 зображено графік зміни температури вздовж осі OX_3 у різні фіксовані моменти часу. При $t \to \infty$ нестаціонарний розв"язок повинен прямувати до стаціонарного, що і отримано при розрахунку.

Список літератури: I. Безлюдный Е.Е., Ракова Л.В. Склепус Н.Г. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Л.Рвачева. - Известия АН БССР, сер. ФМН, I969, вып. I. 2. Бережанська З.С., Гордійчук В.І. Чисельний розв"язок інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду в R^3. - Вісн.Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., I978, вип.I3. 3. Гордійчук В.И. Численное решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в R^3. - Вычислительная и прикладная математика, I977, вып. 33.

УДК 5I8.5I7.948

Б.А.Остудін, О.Є.Кірік

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ БОГОЛЮБОВА-КРИЛОВА

У техніці широко застосовуються конструкції, що містять тонкі металічні смужки, пластини та незамкнуті оболонки. При дослідженні електричних полів, які створюються ними, зручно вважати такі пластини та оболонки нескінченно тонкими, що приводить до необхідності визначати розподіл заряду по незамкнутих провідних поверхнях. Ця задача формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [2]

$$\iint_S \frac{\sigma(M)}{R(Q,M)}\, dS_M = U(Q), \qquad /I/$$

де $\sigma(M)$ - шукана густина розподілу заряду по S; $R(Q,M)$ - відстань між точкою інтегрування на поверхні та деякою контрольною точкою $Q \in S$; $U(Q)$ – відомий потенціал на S .

У випадку декількох заряджених поверхонь S можна інтерпретувати як $S=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$, $\sigma(M)=\{\sigma_i(M)\}_{i=1}^{m}$ – як кусково неперервну функцію, а інтеграл в /I/ вважати сумою інтегралів по відповідних поверхнях S_i .

Зробивши в /I/ перехід від поверхневого інтегралу до подвійного, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} \iint_{\Omega_i} \frac{F_i(x,y)\sigma_i(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[f_i(x,y)-z_0]^2}} = U(x_0,y_0,z_0), \qquad /2/$$

де $z=f_i(x,y)$ – рівняння поверхні S_i у декартовій прямокутній системі координат (x,y,z), $F_i(x,y)=\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$;

$\Omega_i=\{(x,y): d_i \le x \le \beta_i \wedge G_1^{(i)}(x) \le y \le G_2^{(i)}(x)\}$ або

$\Omega_i=\{(x,y): \gamma_i \le y \le \delta_i \wedge T_1^{(i)}(y) \le x \le T_2^{(i)}(y)\}$.

Для розв"язування інтегрального рівняння /2/ застосуємо метод Боголюбова-Крилова [I] . З цією метою розіб"ємо кожну з областей Ω_i на достатню кількість підобластей Δ_k^i , так що $\Omega_i = \bigcup_{k=1}^{N_i} \Delta_k^i$. Припустимо, що в межах кожної маленької підобласті Δ_k^i невідома густина набуває постійного значення σ_k^i . Вибираючи контрольні точки /або точки задоволення граничних умов/ у межах підобластей Δ_k^i і записавши співвідношення /2/ для кожної з них, дістаємо для знаходження σ_k^i систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_i} \sigma_k^i \cdot A_{i,j}^{k,n} = U(x_n^j, y_n^j, z_n^j), \quad (j=\overline{1,m};\ n=\overline{1,N_j}), \qquad /3/$$

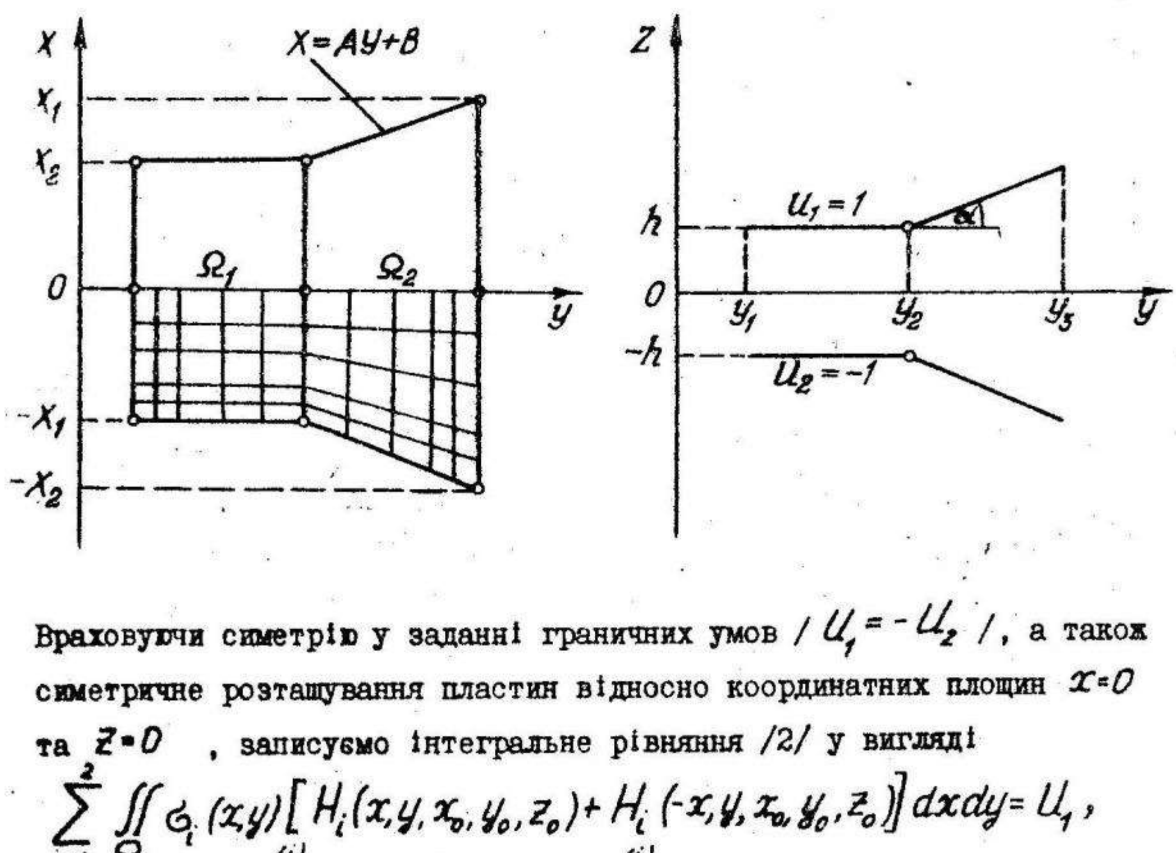
де

$$A_{i,j}^{k,n} = \iint_{\Delta_k^i} \frac{F_i(x,y)\,dx\,dy}{\{(x-x_n^j)^2+(y-y_n^j)^2+[f_i(x,y)-z_n^j]^2\}^{1/2}}. \qquad /4/$$

Інтегральне рівняння /2/ – першого роду, тобто належить до класу некоректних задач. При побудові системи /3/ контрольні точки обираються довільно у межах підобластей Δ_k^i , що приводить до зосередженої особливості в ядрі інтегрального рівняння /2/. Тому слід сподіватись, що матриця системи /3/ невироджена і отриманий наближений розв"язок σ_k^i стійкий.

У деяких випадках вдається обчислити інтеграли /4/ аналітично, що безумовно прискорює розв"язок основної задачі /I/ і не вносить похибки, яка виникає за рахунок застосування формул чисельного інтегрування.

Проілюструємо сказане на прикладі розв"язування конкретної задачі. Нехай потрібно визначити розподіл зарядів на сукупності тонких провідних пластин, показаних на рисунку в проекціях на площини (x,y) і (y,z) декартової прямокутної системи координат (x,y,z).



Враховуючи симетрію у заданні граничних умов / $U_1 = -U_2$ /, а також симетричне розташування пластин відносно координатних площин $x=0$ та $z=0$, записуємо інтегральне рівняння /2/ у вигляді

$$\sum_{i=1}^{2} \iint_{\Omega_i} \sigma_i(x,y)\left[H_i(x,y,x_0,y_0,z_0)+H_i(-x,y,x_0,y_0,z_0)\right]dx\,dy=U_1,$$

де

$$H_i=H_1^{(i)}(x,y,x_0,y_0,z_0)-H_2^{(i)}(x,y,x_0,y_0,z_0);$$

$$H_j^{(i)}=\sqrt{1+(i-1)\,tg^2\alpha}\,\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\left[(-1)^{j+1}\left(y\,tg(i-1)\alpha+h-y_2\,tg(i-1)\alpha\right)-z_0\right]^2\right\}^{-1/2},$$

причому $\Omega_1 = \{(x,y): 0 \leq x \leq x_2 \wedge y_2 \leq y \leq y_2\}$,

$$\Omega_2 = \{(x,y): 0 \leq x \leq Ay + B \wedge y_2 \leq y \leq y_3\}.$$

Контрольні точки з координатами x_0, y_0, z_0 вибираються на пластинах, що мають проекції Ω_1 та Ω_2 на площині $/ x , y /$. Використовуючи вузли Чебишова, розбиваємо Ω_i на підобласті нерівномірною сіткою, що згущується на краях. Такий спосіб розбиття задається для зменшення похибки при визначенні невідомої густини поблизу краю пластини, де вона має особливість. Далі, обираючи контрольні точки в центрах ваги підобластей, а також на краю поверхні, отримаємо перевизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь типу /3/, яка розв"язується методом найменших квадратів. Контроль точності розв"язку можна здійснювати шляхом перевірки задоволення граничних умов у деяких точках, що лежать між контрольними.

Зауважимо також, що інтеграли типу /4/ в цьому випадку обчислювали з використанням такої узагальненої формули:

$$\int_c^d \int_{ay+b}^{py+q} \frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}\, dx\, dy}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(y\,tg\alpha-\bar{z}_0)^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \bar{c} \ln \frac{\bar{a}\bar{c}+\bar{b}+\left[(\bar{a}\bar{c}+\bar{b})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}}{\bar{p}\bar{c}+\bar{q}+\left[(\bar{p}\bar{c}+\bar{q})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}} +$$

$$+ \bar{d} \ln \frac{\bar{p}\bar{d}+\bar{q}+\left[(\bar{p}\bar{d}+\bar{q})^2+\bar{d}^2+K\right]^{1/2}}{\bar{a}\bar{d}+\bar{b}+\left[(\bar{a}\bar{d}+\bar{b})^2+\bar{d}^2+K\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+\bar{p}^2}} \ln \frac{(1+\bar{p}^2)\bar{d}+\bar{p}\bar{q}+\sqrt{1+\bar{p}^2}\left[(\bar{p}\bar{d}+\bar{q})^2+\bar{d}^2+K\right]^{1/2}}{(1+\bar{p}^2)\bar{c}+\bar{p}\bar{q}+\sqrt{1+\bar{p}^2}\left[(\bar{p}\bar{c}+\bar{q})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\bar{b}}{\sqrt{1+\bar{a}^2}} \ln \frac{(1+\bar{a}^2)\bar{c}+\bar{a}\bar{b}+\sqrt{1+\bar{a}^2}\left[(\bar{a}\bar{c}+\bar{b})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}}{(1+\bar{a}^2)d+\bar{a}\bar{b}+\sqrt{1+\bar{a}^2}\left[(\bar{a}\bar{d}+\bar{b})^2+\bar{d}^2+K\right]^{1/2}} +$$

$$+ \sqrt{K}\, arctg \frac{\bar{p}K-\bar{q}\bar{d}}{\sqrt{K}\left[(\bar{p}\bar{d}+\bar{q})^2+\bar{d}+K\right]^{1/2}} - \sqrt{K}\, arctg \frac{\bar{p}K-\bar{q}\bar{c}}{\sqrt{K}\left[(\bar{p}\bar{c}+\bar{q})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}} +$$

$$+ \sqrt{K}\, arctg \frac{\bar{a}K-\bar{b}\bar{c}}{\sqrt{K}\left[(\bar{a}\bar{c}+\bar{b})^2+\bar{c}^2+K\right]^{1/2}} - \sqrt{K}\, arctg \frac{\bar{a}K-\bar{b}\bar{d}}{\sqrt{K}\left[(\bar{a}\bar{d}+\bar{b})^2+\bar{d}^2+K\right]^{1/2}},$$

де $\bar{z}_0 = z_0 + ctg\alpha - h;\ T = \sqrt{1 + tg^2\alpha};\ R = (y_0 + \bar{z}_0 tg\alpha)/T;$

$$K = (\bar{z}_0 + y_0 tg\alpha)^2/T^2;\ \bar{c} = Tc - R;\ \bar{d} = Td - R;\ a = a/T;$$

$$\bar{b} = \bar{a}R + b - x_0;\ \bar{p} = p/T;\ \bar{q} = \bar{p}R + q - x_0.$$

Ефективність описаної методики перевіряли за типовою програмою, складеною на алгоритмічній мові ФОРТРАН-IV, при різній кількості невідомих. Середня відносна похибка одержаних розв"язків не перевищує 1%.

Список літератури: 1. Канторович В.Л., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. 2. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. – Киев, Техніка, 1974.

УДК 517.949.8

В.А.Бакалець, В.А.Пучка

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

У праці [1] розглянуто один точний метод розв"язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона на площині та в просторі у випадку замкнених гладких кривих /поверхонь/ другого порядку, коли правою частиною рівняння є алгебраїчний поліном довільного степеня. Застосування згаданого методу приводить до побудови матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що є досить громіздким процесом. Мета нашої роботи – автоматизація процесу побудови матриці коефіцієнтів і розв"язування системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо на площині задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U(x,y) = \mathcal{P}_n(x,y), \qquad /1/$$

$$U(x,y)\Big|_S = 0, \qquad /2/$$