

X	Y	REZ	X	Y	REZ
-0.909	0.0	0.979	1.272	0.0	0.906
-0.545	0.0	1.446	1.636	0.0	0.389
-0.181	0.0	1.763	2.000	0.0	0.0

Список літератури: І. Бакалець В.А., Людкевич Й.В. Метод неозначених коефіцієнтів розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 15, 1979.

УДК 532. 582

Д.В.Гриліцький, В.Я.Онищук

НЕСТАЦІОНАРНА ВЗАЄМОДІЯ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З АКУСТИЧНОЮ ХВИЛЕЮ ТИСКУ

І. Розглянемо тонку пружну сферичну оболонку, яка описується рівняннями лінійної теорії оболонок типу Тимошенка, заповнену всередині акустичним середовищем з параметрами ρ_3 і C_3 /рис. 1/.

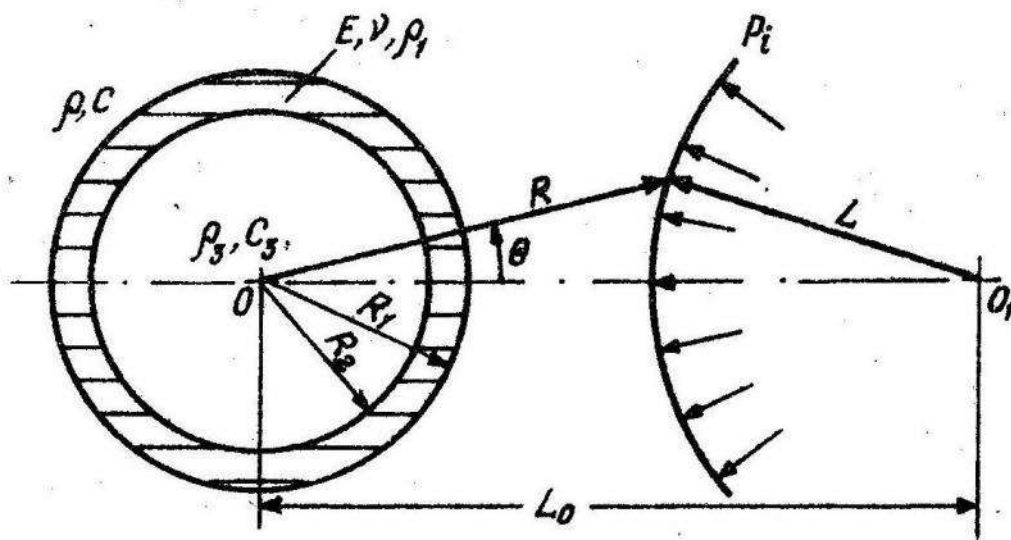


Рис. 1.

Оболонка занурена в безмежну ідеальну стисливу рідину з параметрами ρ , C і знаходиться під дією сферичної хвилі тиску скінченної

тривалості [1]

$$p_i = p_0 \frac{\ell_0}{\ell} f(\tau - \ell) [H(\tau - \ell) - H(\tau - \ell - \tau_0)] \quad /1.1/$$

Рівняння руху оболонки у переміщеннях при осевій симетрії в безрозмірних координатах мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} L_{11} U + L_{12} \psi + L_{13} W &= 0, \\ L_{21} U + L_{22} \psi + L_{23} W &= 0, \\ L_{31} U + L_{32} \psi + L_{33} W + Q &= 0, \end{aligned} \quad /1.2/$$

де

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu - \chi^2 - (1 + \alpha^2) \lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \\ L_{12} &= z_0 (\chi^2 - 2\alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}); \quad L_{13} = (1 + \nu + \chi^2) \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ L_{21} &= \chi^2 - 2\alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \\ L_{22} &= z_0 [\alpha^2 (\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu) - \chi^2 - \alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}]; \quad /1.3/ \\ L_{23} &= -\chi^2 \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad L_{31} = -(1 + \nu + \chi^2) (\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta); \\ L_{32} &= z_0 \chi^2 (\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta); \\ L_{33} &= \chi^2 (\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) - 2(1 + \nu) - (1 + \alpha^2) \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \end{aligned}$$

У формулах /1.1/ - /1.3/ введіть такі позначення:

$$\begin{aligned} \ell &= L/R_1; \quad \ell_0 = L_0/R_1; \quad z = R/R_1; \quad \tau = Ct/R_1; \\ \tau_0 &= Ct_0/R_1; \quad z_0 = R_0/R_1; \quad Q = q/(\alpha \rho C^2); \quad z_2 = R_2/R_1; \\ \alpha &= hR_1 C_{10}^2 \rho_1 / (R_0^2 \rho C^2); \quad \lambda_0 = z_0 \beta_0; \quad \beta_0 = C_{10}/C; \\ C_{10}^2 &= E/(\rho_1 (1 - \nu^2)); \quad \alpha^2 = h^2/(12R_0^2); \quad \chi^2 = (1 - \nu)k_T^2/2; \\ k_T^2 &= 5/6; \quad u = U/R_1; \quad w = W/R_1; \end{aligned}$$

L - довжина радіус-вектора, проведеного в центр джерела хвилі;
 L_0 - відстань від центра джерела до центра оболонки; p_i - тиск у падачій хвилі; p_0 - постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ - довільна функція, яка визначає закон зміни тиску в падачій хвилі;
 $H(\tau)$ - одинична функція Хевісайда; ℓ_0 - тривалість імпульсу; R, θ - сферичні координати; R_1, R_2 - радіуси зовнішньої і відповідно внутрішньої поверхні оболонки; R_0 - радіус середньої поверхні оболонки;
 h - товщина оболонки; ρ, C - густина рідини та швидкість звуку в рідині; E, ν, ρ_1 - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і густина матеріа-

ду оболонки; ρ, C_3 - густина заповнювача і швидкість звуку в заповнювачі; k_r^2 - коефіцієнт зсуву; q - радіальний компонент зовнішнього навантаження на одиницю площі поверхні оболонки; C_{10} - швидкість поширення хвиль в оболонці; U, W - тангенціальне та радіальне переміщення серединної оболонки; ψ - кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки.

Потенціал переміщень Φ для акустичного середовища, в яке занурена сферична оболонка, задовольняє хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \quad /I.4/$$

де ∇^2 - оператор Лапласа.

Вектор переміщення $\vec{U}_e$ і тиск p_e в середовищі визначаються за формулами

$$\vec{U}_e = \text{grad } \Phi, \quad p_e = -\rho C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}. \quad /I.5/$$

Рух заповнювача описується хвильовим рівнянням

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad \beta_3 = C_3 / C, \quad /I.6/$$

де ψ - потенціал переміщень для заповнювача, через який переміщення $\vec{U}_3$ і тиск p_3 у заповнювачі визначаються з формул

$$\vec{U}_3 = \text{grad } \psi, \quad p_3 = -\rho C^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}. \quad /I.7/$$

Задача визначення нестационарних переміщень серединної поверхні оболонки полягає у сумісному інтегруванні рівнянь /I.2, /I.4/ і /I.6/ при таких умовах:

а/ початкові умови нульові;

б/ умова випромінювання при $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi = 0; \quad /I.8/$$

в/ умови контакту

$$q = -p_i / z_{=1} - p_e / z_{=1} + p_3 / z_2 = z_2, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{\rho C^2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) \quad \text{при } z=1, \quad /I.9/$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = - \frac{1}{\rho_3 c^2} \frac{\partial P_3}{\partial z} \quad \text{при } z = z_2;$$

г/ умова обмеженості розв'язку.

2. Для знаходження розв'язку поставленої задачі застосуємо інтегральне перетворення Фур'є по часу. Зображення падаючої хвилі /індекс F / у вигляді безмежного ряду запишемо як

$$P_1^F = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\omega) j_n(\omega z) P_n(\cos \theta), \quad /2.1/$$

де $g_n(\omega) = i\omega l_0 f^F(\omega) (2n+1) h_n(\omega l_0)$; ω - параметр перетворення Фур'є; $f^F(\omega)$ - зображення Фур'є від функції $f(\tau)$;

$h_n(\omega) = j_n(\omega) + i n_n(\omega)$ - сферична функція Ханкеля першого роду;
 $j_n(\omega)$ і $n_n(\omega)$ - сферичні функції Бесселя і Неймана; $P_n(\cos \theta)$ - поліноми Лежандра.

Зображення розв'язків системи /1.2/, хвильових рівнянь /1.4/ і /1.6/ шукаємо у вигляді безмежних рядів

$$\begin{aligned} U^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\omega) g_n(\omega) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\ \Psi^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\omega) g_n(\omega) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad /2.2/$$

$$\begin{aligned} W^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\omega) g_n(\omega) P_n(\cos \theta), \\ \Phi^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\omega) g_n(\omega) h_n(\omega z) P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad /2.3/$$

$$\Psi^F = \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\omega) g_n(\omega) j_n(\omega_3 z) P_n(\cos \theta), \quad /2.4/$$

де $u_n, \psi_n, w_n, x_n, y_n$ - невідомі коефіцієнти; $\omega_3 = \omega/\beta_3$.

Зображення розв'язків /2.2/ - /2.4/ обмежені в областях, де вони визначені, а розв'язок /2.3/, крім того, задовольняє зображення умови випромінювання /1.8/.

Підставляючи розклади /2.2/ - /2.4/ у зображення системи диференціальних рівнянь руху /1.2/ і граничні умови /1.9/, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів W_n

$$\begin{aligned} \alpha_{11} u_n + \alpha_{12} \psi_n + \alpha_{13} w_n &= 0, \\ \alpha_{21} u_n + \alpha_{22} \psi_n + \alpha_{23} w_n &= 0, \end{aligned} \quad /2.5/$$

$$\alpha_{31} U_n + \alpha_{32} V_n + \alpha_{33} W_n + \alpha_{34} X_n + \alpha_{35} Y_n = \alpha_{30},$$

$$\alpha_{43} W_n + \alpha_{44} X_n = \alpha_{40},$$

$$\alpha_{53} W_n + \alpha_{55} Y_n = 0,$$

де

$$\alpha_{11} = -n(n+1) + (1-\nu - \mathcal{X}^2) + (1+\alpha^2)\omega_0^2;$$

$$\alpha_{12} = \tau_0 (\mathcal{X}^2 + 2\alpha^2\omega_0^2); \alpha_{13} = 1+\nu + \mathcal{X}^2; \alpha_{21} = \mathcal{X}^2 + 2\alpha^2\omega_0^2;$$

$$\alpha_{22} = \tau_0 \{ \alpha^2 [-n(n+1) + 1 - \nu + \omega_0^2] - \mathcal{X}^2 \}; \alpha_{23} = -\mathcal{X}^2;$$

$$\alpha_{31} = (1+\nu + \mathcal{X}^2)n(n+1); \alpha_{32} = -\tau_0 \mathcal{X}^2 n(n+1);$$

$$\alpha_{33} = -\mathcal{X}^2 n(n+1) - 2(1+\nu) + (1+\alpha^2)\omega_0^2; \alpha_{34} = -\frac{\omega^2}{\alpha} h_n(\omega);$$

$$\alpha_{35} = \frac{\omega^2}{\alpha} \frac{\rho_3}{\rho} j_n(\omega_3 z_2); \alpha_{30} = \frac{E}{\alpha(1+\nu)\rho C^2} j_n(\omega); \alpha_{43} = 1;$$

$$\alpha_{44} = -\omega h_n(\omega); \alpha_{40} = \frac{E}{\alpha(1+\nu)\rho C^2} j_n(\omega); \alpha_{53} = 1;$$

$$\alpha_{55} = -\omega_3 j_n(\omega_3 z_2); \omega_0 = \mathcal{X}_0 \omega.$$

Штрих означає похідну по аргументу.

Розв'язавши систему /2.5/ відносно W_n , знайдемо

$$W_n(\omega) = \frac{E}{(1+\nu)\rho C^2 \omega^2} [W_{1n}(\omega) + i W_{2n}(\omega)], \quad /2.6/$$

де

$$W_{1n}(\omega) = -Y D_2 / (X^2 + Y^2); \quad W_{2n}(\omega) = -X D_2 / (X^2 + Y^2);$$

$$X = \omega j_n(\omega) D_2 - (\alpha D_1 + \frac{\omega^2 \rho_3}{\omega_3 \rho} \frac{j_n(\omega_3 z_2)}{j_n'(\omega_3 z_2)} D_2) j_n'(\omega);$$

$$Y = \omega n_n(\omega) D_2 - (\alpha D_1 + \frac{\omega^2 \rho_3}{\omega_3 \rho} \frac{j_n(\omega_3 z_2)}{j_n'(\omega_3 z_2)} D_2) n_n'(\omega);$$

$$D_1 = \det |\alpha_{ij}| (i, j = 1, 2, 3); \quad D_2 = \det |\alpha_{ij}| (i, j = 1, 2). \quad /2.7/$$

Переміщення серединної поверхні оболонки у просторі оригіналів знаходимо за формулою

$$\frac{\rho C^2}{\rho_0} W = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{1n} + i W_{2n}}{\omega^2} g_n(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right\} P_n(\cos\theta).$$

3. Числові розрахунки проводили для тонкої сферичної оболонки $E = 7,220 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu = 0,31$, $\rho_1 = 0,264$ г/см³, $h/R_0 = 7,88 \cdot 10^{-3}$, що занурена в воду $\rho = 1,0$ г/см³, $C = 1410$ м/с з параметрами заповнювача $\rho_3 = \rho$, $C_3 = C$. Закон зміни тиску в падаючій хвилі приймали синусоїдальним $f(\tau) = \sin \omega_0 \tau$, де ω_0 - частота заповнення, а фронт хвилі вважали плоским, тобто

$$g_n(\omega) = f(\omega) (2n+1) i^{-n} \exp(i\omega l_0).$$

Обчислення інтегралу /2.7/ проводили методом числового інтегрування Ромберга [3]. Оптимальні границі та крок інтегрування вибирали за допомогою БОМ "ЕС-1022".

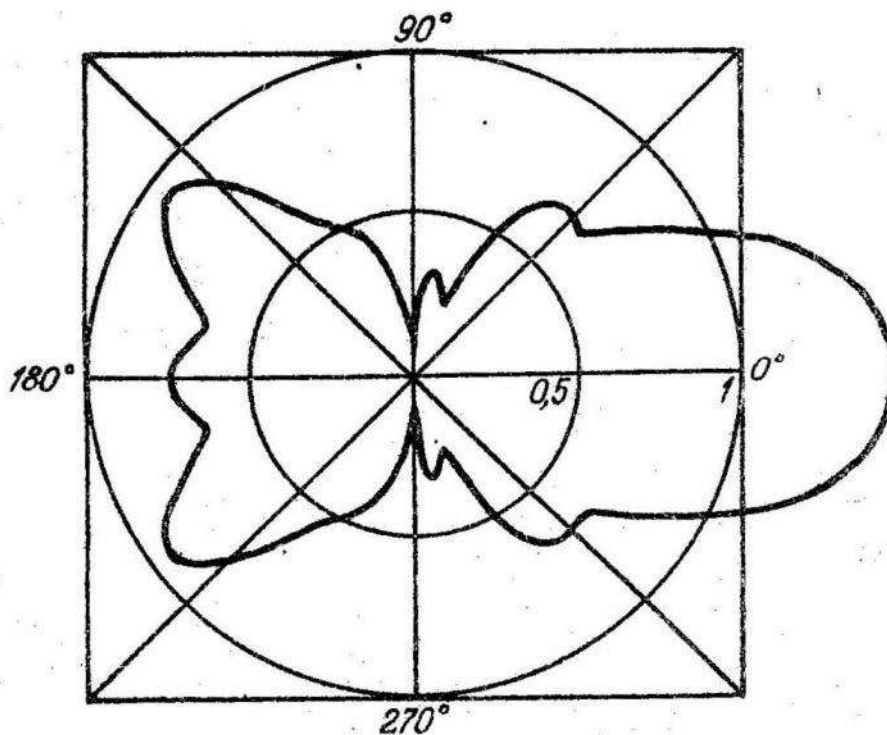


Рис. 2.

На рис. 2 показана діаграма стаціонарних переміщень $(\rho C^2/\rho_0) W \cdot 10^4$ залежно від кута θ для частоти заповнення $\omega_0 = 9,3$.

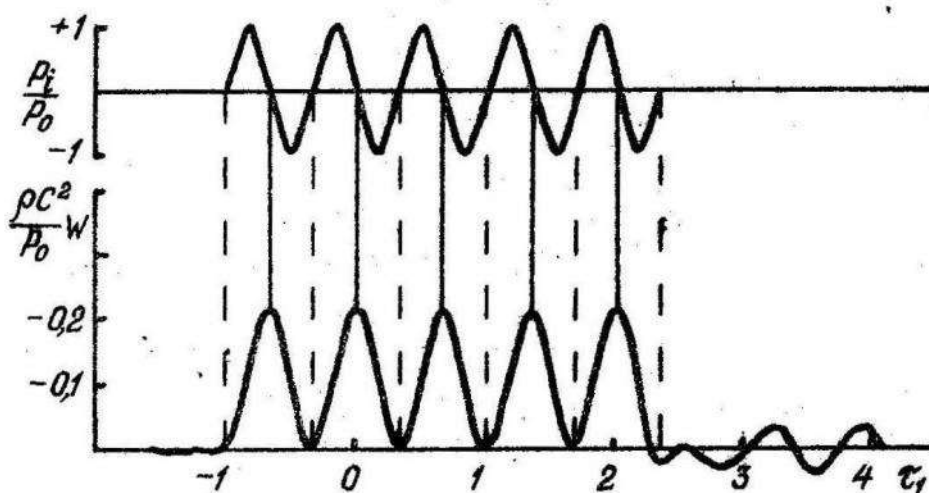


Рис. 3.

На рис. 3 зображені нестационарні переміщення $(\rho C^2 / p_0) W$ залежно від безрозмірного часу $\tau_1 = \tau - \ell_0$ для частоти заповнення $\omega_0 = 9,3$, кута $\theta = 0$ і тривалості імпульсу, який дорівнює п'яти періодам синусоїди $/ \tau_0 = 3,37805/$. У верхній частині рисунку показаний падаючий імпульс.

Список літератури: 1. Н и г у л У.К. и др. Эхо-сигналы от упругих объектов. - Таллин, 1974. 2. Prasad C. On vibrations of spherical shells. - J. Acoustical Society of America, 1964, vol. 36, No. 3. 3. Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S. New aspects in numerical quadrature. - Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.

УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Б.Г.Шелестовський
КВАЗІСТАЦІОНАРНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Розглянемо плоскопаралельний шар скінченної товщини h , поверхні якого вільні від зовнішнього навантаження. На верхній площині шару в крузі радіуса a задана температура T_0 , яка рухається з постійною швидкістю V в напрямі осі ξ_1 прямокутної системи