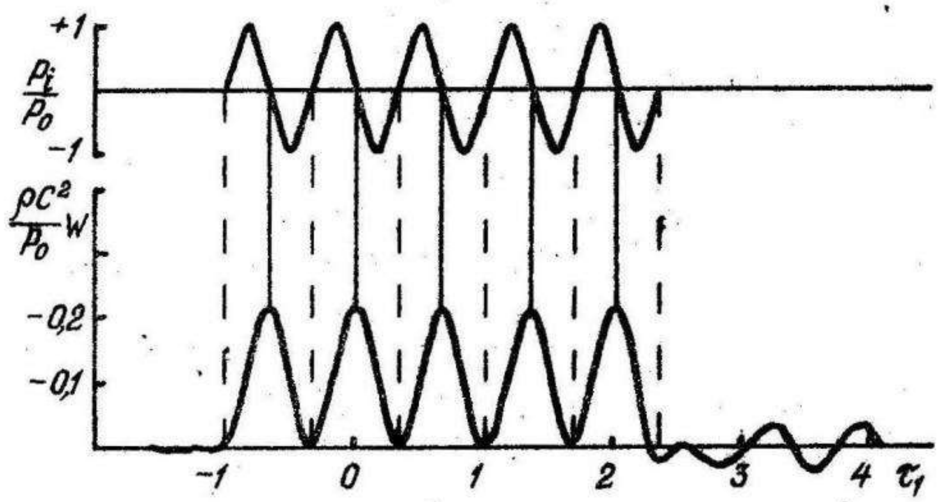

Рис. 3.

На рис. 3 зображені нестаціонарні переміщення $(\rho C^2/p_0)W$ залежно від безрозмірного часу $\tau_1 = \tau - \ell_0$ для частоти заповнення $\omega_0 = 9,3$, кута $\theta = 0$ і тривалості імпульсу, який дорівнює п"яти періодам синусоїди / $\tau_0 = 3,37805$/. У верхній частині рисунку показаний падаючий імпульс.

Список літератури: І. Н и г у л У.К. и др. Эхо-сигналы от упругих объектов. – Таллин, 1974. 2. Prasad C. On vibrations of spherical shells. – J. Acoustical Society of America, 1964, vol. 36, No. 3. 3. Bauer F.L., Rutishauer H. Stiefel S. New aspects in numerical quadrature. – Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.

УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Б.Г.Шелестовський

КВАЗІСТАЦІОНАРНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Розглянемо плоскопаралельний шар скінченної товщини h, поверхні якого вільні від зовнішнього навантаження. На верхній площині шару в крузі радіуса a задана температура T_0, яка рухається з постійною швидкістю V в напрямі осі ξ_1 прямокутної системи координат ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 /рис. I/. Зовні рухомого круга і на нижній площині шару $z=h$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона. Визначимо величину та характер розподілу температурного поля і температурних напружень у плоскопаралельному шарі.

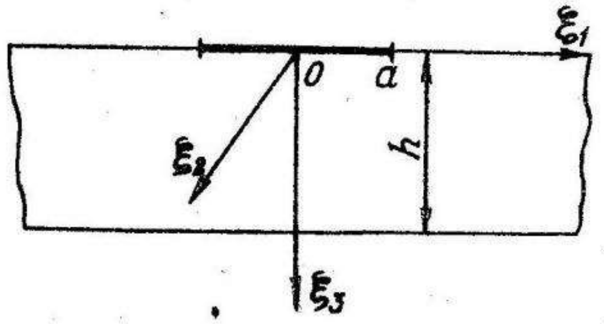

Рис. I.

Рівняння теплопровідності має вигляд [I]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial t} \right) T = 0, \qquad /I/$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}\ ; \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c\rho}\ ;$$

λ – коефіцієнт теплопровідності; C – питома теплоємність; ρ – густина.

Спрощення задачі одержимо за умови застосування рухомої системи координат x , y , z , яка зв"язана з рухомим температурним штампом так, що початок координат поміщено у центрі круга радіуса a . Приймемо цю систему паралельною системі ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , тоді залежності між координатами обох систем

$$\xi_1 = Vt + x, \quad \xi_2 = y, \quad \xi_3 = z.$$

Рівняння теплопровідності /I/ та граничні умови у рухомій системі координат наберуть вигляду

$$\left(\nabla^2 + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) T = 0, \quad 2\mu = \frac{V}{\varkappa}, \qquad /2/$$

$$T=T_0,\ 0\leq r<a,\ \frac{\partial T}{\partial z}=\kappa T,\ r>a,\ z=0. \qquad /3/$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=-\kappa_1 T,\ z=h,\ 0<r<\infty. \qquad /4/$$

Розв"язок рівняння /2/ шукаємо як

$$T(x,y,z)=e^{-\mu x}F(x,y,z). \qquad /5/$$

Підставивши /5/ в /2/, одержимо

$$\nabla^2 F-\mu^2 F=0. \qquad /6/$$

Зобразимо функцію F у вигляді розкладу в ряд Фур"є по кутовій координаті φ, враховуючи, що F – парна функція

$$F=\sum_{n=0}^{\infty} F_n(r,z)\cos n\varphi. \qquad /7/$$

Скористаємось циліндричною системою координат r, φ, z

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z.$$

Підставивши /7/ у рівняння /6/, матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_n}{\partial r}+\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2}-\left(\mu^2+\frac{n^2}{r^2}\right)F_n\right]\cos n\varphi=0. \qquad /8/$$

Застосувавши до співвідношення /8/ інтегральне перетворення Ханкеля, використавши його властивості та теорему обернення, знайдемо

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\varphi\int_0^{\infty} p\left[A_n(p)\,\mathrm{sh}\,\beta z+B_n(p)\,\mathrm{ch}\,\beta z\right]J_n(pr)\,dp,$$

$$\beta=\sqrt{p^2+\mu^2}, \qquad /9/$$

де $J_n(pr)$ – функція Бесселя першого роду.

Задовольняючи граничні умови /4/ і /3/, одержуємо

$$B_n=-H(p)A_n(p),\quad H(p)=\frac{\beta+\kappa_1\,\mathrm{th}\,\beta h}{\beta\,\mathrm{th}\,\beta h+\kappa_1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\varphi\int_0^{\infty}\Phi_n(p)J_n(pr)\,dp=-T_0 e^{\mu r\cos\varphi}$$

$$0\leq r<a, \qquad /10/$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\varphi\int_0^{\infty}\frac{p\,\Phi_n(p)}{1-g(p)}J_n(pr)\,dp=0,\quad r>a,$$

де введені позначення

$$pH(p)A_n(p) = \Phi_n(p); \quad 1-g(p) = \frac{pH(p)}{\beta + KH(p)} \qquad /11/$$

Розкладемо $e^{\mu r\cos\varphi}$ у ряд Фур"є

$$e^{\mu r\cos\varphi} = I_0(\mu r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mu r)\cos n\varphi, \qquad /12/$$

де $I_n(\mu r)$ – модифікована функція Бесселя.

Прирівнюючи члени при $\cos n\varphi$ у співвідношенні /10/, з врахуванням /12/ маємо

$$\int_0^{\infty} \Phi_n(p) J_n(pr)\,dp = \omega(r), \quad 0 \le r < a;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{p\Phi(p)}{1-g(p)} J_n(pr)\,dp = 0, \quad r > a, \qquad /13/$$

$$\omega(r) = -2\gamma_n I_n(\mu r), \quad \gamma_n = \begin{cases} \frac{1}{2}T_0, & n=0, \\ T_0, & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Позначивши

$$\frac{\Phi_n(\lambda)}{1-g(\lambda)} = f_n(\lambda),$$

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a t^{1/2} \varphi_n(t) J_{n-1/2}(\lambda t)\,dt, \qquad /14/$$

парні інтегральні рівняння /13/ зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно функції $\varphi_n(t)$ [2]

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi}\left[\Psi_n(t) + \frac{1}{2}\int_0^a M_n(x,t)\varphi_n(x)\,dx\right], \qquad /15/$$

ядро і вільний член якого мають вигляд

$$M_n(x,t) = \pi\sqrt{xt}\int_0^{\infty} \lambda g(\lambda) J_{n-1/2}(\lambda x) J_{n-1/2}(\lambda t)\,d\lambda, \qquad /16/$$

$$t^n \Psi_n(t) = \lim_{x\to 0}\left[x^n \omega(x)\right] + nt^n \int_0^{\pi/2} \omega_n(t\sin\theta)\sin^{n-1}\theta\,d\theta +$$

$$+ t^{n+1}\int_0^{\pi/2} \omega_n'(t\sin\theta)\sin^n\theta\,d\theta. \qquad /17/$$

Відзначимо, що у випадку, коли нагріта область рухається по поверхні півпростору, а ззовні нагрітої області підтримується нульова температура, розв"язок рівняння теплопровідності має вигляд

$$T=2e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_0^{\infty}\rho\,\frac{\mu I_{n-1}(\mu a)J_n(pa)-pI_n(\mu a)J_{n-1}(pa)}{\mu^2+p^2}\times$$
$$\times J_n(pr)e^{-\sqrt{p^2+\mu^2}\,z}\,dp\cdot\cos n\varphi. \qquad /18/$$

Визначенню квазістаціонарного розподілу напружень у плоскому випадку, зумовленого рухом розривного температурного поля, присвячена праця [3] .

Для знаходження квазістаціонарних температурних напружень скористаємось термопружним потенціалом переміщень, який задовольняє рівняння [1]

$$\nabla^2\Phi=mT, \quad m=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha, \qquad /19/$$

де α - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Підставивши замість T в /2/ його вираз з /19/, одержимо

$$T+\frac{2\mu}{m}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,$$

звідки

$$\Phi=-\frac{m}{2\mu}\int_{-\infty}^{x}T(x,y,z)\,dx \qquad /20/$$

Поверхні шару вільні від зовнішнього навантаження, тому задоволення граничних умов $\sigma_{zz}=0,\ \tau_{zx}=0,\ \tau_{zy}=0,\ z=0,\ z=h$

приводить до розв"язання першої основної задачі теорії пружності для шару.

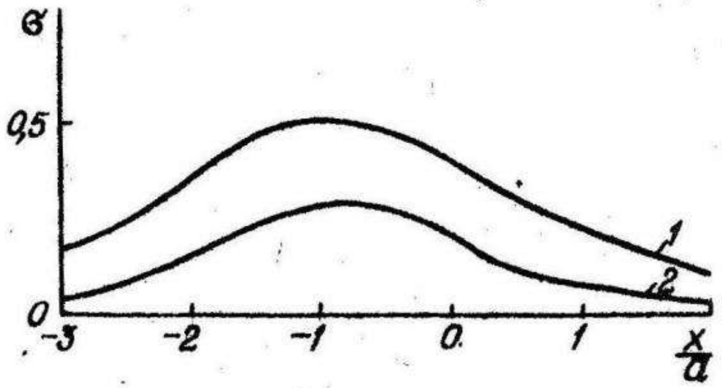

Рис. 2.

Інтегральне рівняння /І5/ розв"язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса. На рис. 2 показано графік розподілу напружень σ_{xx} . При цьому

$$\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\frac{\sigma_{xx}}{2G\alpha T_0}\,;\quad \mu a=1,\ \frac{h}{a}=1,\ Ka=0{,}5,\ K_1 a=1.$$

Крива І - σ при z = 0, крива 2 - при $\frac{z}{h}$ = 0,5.

Список літератури: І. Новацкий В. Вопросы термоупругости. - М.: Изд-во АН СССР, І962. 2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М.;Л.: Изд-во АН СССР, І967. 3. Яханшахи А. Квазистатическое распределение напряжений, обусловленное движущимся по плоской границе разрывным распределением температуры. - Прикладная механика. ТАОИМ, І966, № 4.

УДК 533.6.0І3.42

В.Я.Онищук

АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ ВІД СУЦІЛЬНОЇ ПРУЖНОЇ СФЕРИ

І. Розглянемо суцільну пружну сферу, занурену в безмежну ідеальну стисливу рідину, на яку діє зосереджений силовий імпульс скінченної тривалості $0 \leq \tau \leq \tau_0$, прикладений у точці з координатами $/1,\ \theta_0,\ \varphi_0/$, причому

$$P_i = P_0 f(\tau)\,\frac{\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)}{\sin\theta}\left[H(\tau)-H(\tau-\tau_0)\right], \qquad /І.І/$$

$$\tau = Ct/R_1,\quad \tau_0 = Ct_0/R_1.$$

У формулі /І.І/ і далі P_i - тиск, викликаний зосередженим імпульсом; P_0 - постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ - функція, що визначає закон зміни тиску в імпульсі; $H(\tau)$ - одинична функція Хевісайда; $\delta(\theta)$ - функція Дірака; R, θ, φ - сферичні координати; t - час; t_0 - тривалість імпульсу; R_1 - радіус сфери; E, ν, ρ_1 - модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу сфери; ρ, C - густина рідини і швидкість звуку в рідині; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}$ - компоненти тензора напруження у сфері. Всі лінійні величини віднесені до радіуса сфери.