Інтегральне рівняння /I5/ розв"язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса. На рис. 2 показано графік розподілу напружень σ_{xx}. При цьому

$$\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\frac{\sigma_{xx}}{2G\alpha T_0}\,; \quad \mu a = 1,\ \frac{h}{a} = 1,\ Ka = 0{,}5,\ K_1 a = 1.$$

Крива I – σ при z = 0, крива 2 – при $\frac{z}{h}$ = 0,5.

Список літератури: I. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, I962. 2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.;Л.: Изд-во АН СССР, I967. 3. Яханшахи А. Квазистатическое распределение напряжений, обусловленное движущимся по плоской границе разрывным распределением температуры. – Прикладная механика. ТАОИМ, I966, № 4.

УДК 533.6.0I3.42

В.Я.Онищук

АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ ВІД СУЦІЛЬНОЇ ПРУЖНОЇ СФЕРИ

I. Розглянемо суцільну пружну сферу, занурену в безмежну ідеальну стисливу рідину, на яку діє зосереджений силовий імпульс скінченної тривалості $0 \leq \tau \leq \tau_0$, прикладений у точці з координатами $/1,\ \theta_0,\ \varphi_0/$, причому

$$P_i = P_0 f(\tau) \frac{\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{\sin\theta}\left[H(\tau) - H(\tau-\tau_0)\right], \qquad /I.I/$$

$$\tau = Ct/R_1, \quad \tau_0 = Ct_0/R_1.$$

У формулі /I.I/ і далі P_i – тиск, викликаний зосередженим імпульсом; P_0 – постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ – функція, що визначає закон зміни тиску в імпульсі; $H(\tau)$ – одинична функція Хевісайда; $\delta(\theta)$ – функція Дірака; R, θ, φ – сферичні координати; t – час; t_0 – тривалість імпульсу; R_1 – радіус сфери; E, ν, ρ_1 – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу сфери; ρ, C – густина рідини і швидкість звуку в рідині; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}$ – компоненти тензора напруження у сфері. Всі лінійні величини віднесені до радіуса сфери.

Потенціал переміщень Φ для акустичного середовища, яке оточує сферу, задовольняє хвильове рівняння

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \qquad /I.2/$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Вектор переміщення $\vec{u}_e(u_{e\tau}, u_{e\theta}, u_{e\varphi})$ і тиск p_e в акустичному середовищі через потенціал Φ визначають за формулами

$$\vec{u}_e = grad\,\Phi, \qquad p_e = -\rho C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}. \qquad /I.3/$$

Якщо вектор пружного переміщення $\vec{u}(u_\tau, u_\theta, u_\varphi)$ для сфери записати у вигляді

$$\vec{u} = grad\,k + rot\,\vec{\psi}, \qquad div\,\vec{\psi} = 0, \qquad /I.4/$$

то рівняння руху можна записати у вигляді двох незалежних хвильових рівнянь

$$\nabla^2 k = \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2}, \quad \nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial \tau^2}, \qquad /I.5/$$

де $\beta_1 = C_1/C$, $\beta_2 = C_2/C$, C_1 і C_2 – швидкості поширення хвиль розширення і хвиль зсуву в сфері.

Задача знаходження випроміненого нестаціонарного звукового поля полягає в сумісному інтегруванні хвильових рівнянь /I.2/ і /I.5/ при таких умовах:

а/ початкові умови нульові;

б/ умова випромінювання при $\tau \to \infty$

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi = 0, \quad \tau = R/R_1; \qquad /I.6/$$

в/ умови контакту на поверхні сфери /при τ = I/

$$\sigma_{\tau\tau} + p_e + p_i = 0, \quad \sigma_{\tau\theta} = \sigma_{\tau\varphi} = 0, \quad u_\tau - u_{e\tau} = 0. \qquad /I.7/$$

Припускаємо, що розглядувані функції набувають скінченних значень в областях, де вони визначені.

2. Для знаходження розв"язку поставленої задачі застосуємо інтегральне перетворення Фур"є по часу і, розклавши дельта-функцію в ряд по тессеральних сферичних функціях, зобразимо зосереджений

імпульс /I.I/ у вигляді

$$p_i^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi], \qquad /2.I/$$

де $a_{nm} = f^F(\omega)A_{nm}$, $b_{nm} = f^F(\omega)B_{nm}$, ω – параметр перетворення Фур"є; $f^F(\omega)$ – зображення Фур"є від $f(t)[H(t)-H(t-t_0)]$; A_{nm} і B_{nm} – коефіцієнти розкладу дельта-функції в ряд по тессеральних функціях.

Застосування перетворення Фур"є до хвильових рівнянь /I.2/, /I.5/ і умови випромінювання /I.6/ дає

$$(\nabla^2 + \omega^2)\,\Phi^F = 0, \qquad /2.2/$$

$$(\nabla^2 + \omega_1^2)\,k^F = 0, \quad \omega_1 = \omega/\beta_1, \qquad /2.3/$$

$$(\nabla^2 + \omega_2^2)\,\vec{\psi}^F = 0, \quad \omega_2 = \omega/\beta_2, \qquad /2.4/$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega\right)\Phi^F = 0. \qquad /2.5/$$

Розв"язок рівняння /2.2/, який задовольняє умову /2.5/, шукаємо у вигляді безмежного ряду

$$\frac{E}{1+\nu}\Phi^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r)\,x_n(\omega) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi], \qquad /2.6/$$

де $h_n(\omega r)$ – сферична функція Ханкеля першого роду; $x_n(\omega)$ – шукані коефіцієнти.

Розв"язок векторного хвильового рівняння /2.4/ запишемо у вигляді [I]

$$\vec{\psi}^F = \mathrm{rot}(\vec{i}_r r X_2) + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\vec{i}_r r X_1), \qquad /2.7/$$

де $\vec{i}_r$ – одиничний вектор у радіальному напрямі.

Кожна зі скалярних функцій X_j / j = I,2/ задовольняє одне і те ж хвильове рівняння

$$(\nabla^2 + \omega_2^2)\,X = 0. \qquad /2.8/$$

Загальні розв"язки рівнянь /2.3/ і /2.8/, обмежені при $r \to 0$, в координатах r, θ, φ шукаємо у вигляді безмежних рядів

$$\frac{E}{1+\nu}k^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\omega_1 r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi], \qquad /2.9/$$

$$\frac{E}{1+\nu}\chi = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\omega_2 r) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\left[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi\right], \qquad /2.10/$$

де $z_n(\omega_i r) = C_{in} j_n(\omega_i r)$; $j_n(\omega_i r)$ – сферична функція Бесселя; C_{in} – довільні сталі.

Компоненти вектора пружного переміщення у просторі зображень Фур"є через розв"язки /2.9/ і /2.10/ визначаються за формулою

$$\vec{u}^F = a_1 \operatorname{grad} k^F + a_2 \operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_1) + a_3 \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_2), \qquad /2.11/$$

де a_1 , a_2 , a_3 – довільні сталі.

Використовуючи співвідношення деформації-переміщення і напруження-деформації та задовольняючи перетворені по Фур"є умови контакту /1.7/, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження безрозмірних невідомих комплексних коефіцієнтів $x_n(\omega)$ для кожного члена ряду /2.6/

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} a_n + \alpha_{12} b_n + (\alpha_{13} + i\beta_{13}) x_n = \alpha_{10}, \\ &\alpha_{21} a_n + \alpha_{22} b_n + (\alpha_{23} + i\beta_{23}) x_n = 0, \\ &\alpha_{31} a_n + \alpha_{32} b_n = 0, \end{aligned} \qquad /2.12/$$

де коефіцієнти α_{ij} і β_{ij} визначаються згідно з формулами

$$\alpha_{11} = \omega_1^2\left[\frac{\nu}{1-2\nu} j_n(\omega_1) - j_n''(\omega_1)\right], \quad \alpha_{12} = n(n+1)\left[j_n(\omega_2) - \omega_2 j_n'(\omega_2)\right],$$

$$\alpha_{13} = -\frac{\rho C^2(1+\nu)}{E}\,\omega^2 j_n(\omega), \quad \beta_{13} = -\frac{\rho C^2(1+\nu)}{E}\,\omega^2 n_n(\omega),$$

$$\alpha_{10} = 1, \quad \alpha_{21} = \omega_1 j_n'(\omega_1), \quad \alpha_{22} = n(n+1) j_n(\omega_2), \qquad /2.13/$$

$$\alpha_{23} = -\omega j_n'(\omega), \quad \beta_{23} = -\omega n_n'(\omega),$$

$$\alpha_{31} = 2\left[j_n(\omega_1) - \omega_1 j_n'(\omega_1)\right], \quad \alpha_{32} = -\omega_2^2 j_n''(\omega_2) - (n^2+n-2) j_n(\omega_2);$$

$a_n = a_1 C_{1n}$, $b_n = a_3 C_{2n}$, $n_n(\omega)$ – сферична функція Неймана /штрих означає похідну по аргументу/.

Розв"язок системи /2.12/ можна записати у вигляді

$$x_{1n} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{23} - \varkappa_n \alpha_{13})\varkappa_n \alpha_{10}, \quad x_{2n} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{23} - \varkappa_n \beta_{13})\varkappa_n \alpha_{10}, \qquad /2.14/$$

де $x_n = x_{1n} + i x_{2n}$, $\Delta = (\alpha_{23} - \varkappa_n \alpha_{13})^2 + (\beta_{23} - \varkappa_n \beta_{13})^2$,

$$\varkappa_n = (\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{32}) / (\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32}).$$

Якщо записати зображення тиску в випроміненому полі у вигляді

$$P_e^F = P_0 f^F(\omega) F^F(\omega), \qquad /2.15/$$

де

$$F^F(\omega) = \rho C^2 \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r) x_n(\omega) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi]$$

– одиничне стаціонарне поле від сфери, то перехід в область оригіналів здійснюється за формулою

$$\frac{P_e}{P_0} = \frac{1}{2\pi} Re \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\omega) F^F(\omega) exp(-i\omega\tau) d\omega. \qquad /2.16/$$

3. Обчислення інтегралу /2.16/ проводили методом числового інтегрування Ромберга [2]. Закон зміни тиску в зосередженому імпульсі приймався за синусоїду, тобто

$$f(\tau) = \sin \omega_0 \tau, \qquad /3.1/$$

де ω_0 – частота синусоїдального заповнення.

Числові розрахунки звукового поля проводили в дальньому полі $/ r \gg 1 /$ на осі дії зосередженого силового імпульсу $/ \theta = 0 /$, причому ця вісь збігалась з віссю z декартової системи координат $/ \theta_0 = 0 /$. Програма складена на мові ФОРТРАН-IУ і реалізована на ЕОМ ЕС-1022.

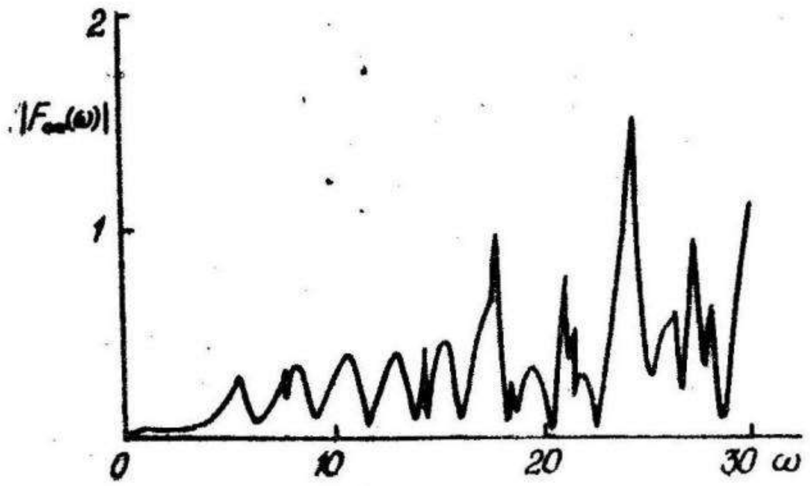

Рис. I.

На рис. I–3 показані графіки випроміненого поля від алюмінієвої сфери $/E = 6{,}76 \cdot 10^5 кГ/см^2,\ \nu = 0{,}355,\ \rho_1 = 2{,}7\ г/см^3/$ в воді $/\rho = 1{,}0\ г/см^3,\ C = 1410\ м/с/$.

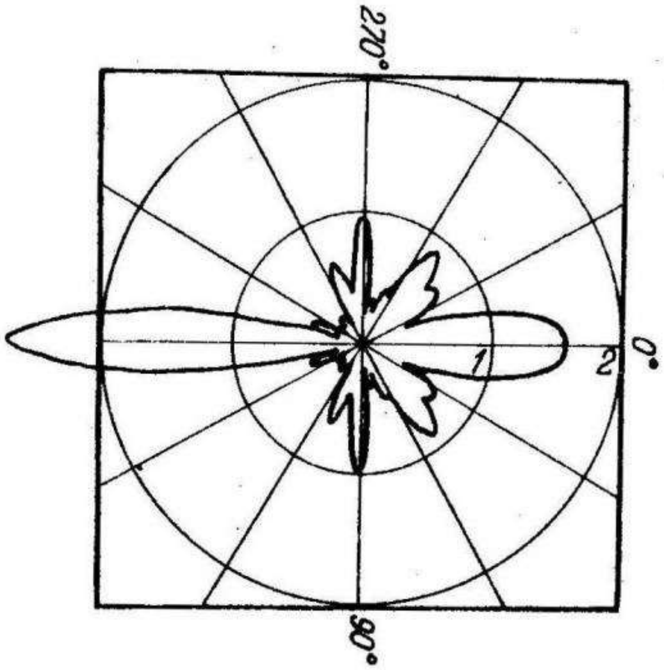

Рис. 2.

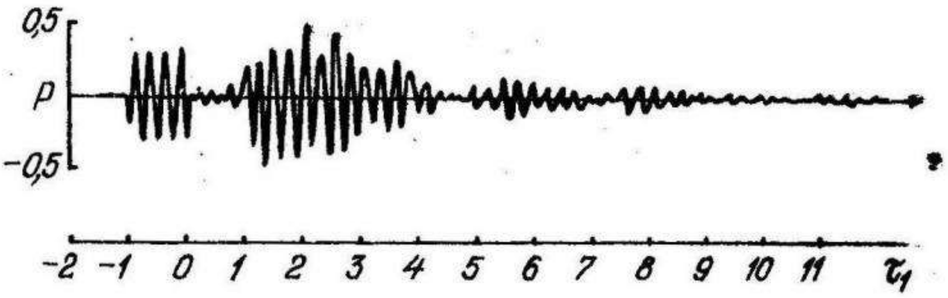

Рис. 3.

На рис. I зображена амплітуда стаціонарного звукового поля $\underset{\infty}{F}(\omega)=rF^{F}(\omega)$ залежно від безрозмірної частоти $\omega=\Omega R_1/C$, де Ω - кругова частота імпульсу.

На рис. 2 показана діаграма стаціонарного звукового поля залежно від кута θ для частоти $\omega=24,3$, яка відповідає максимуму амплітуди стаціонарного поля /рис.I/.

На рис. 3 зображено нестаціонарне звукове поле $p=rP_c/P_0$ залежно від безрозмірного часу $\tau_1=\tau-r$ для частоти ω_0 = 24,3 і тривалості імпульсу τ_0 = I,0.

Список літератури: I. М о р з Ф.М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т.2. – М.: ИЛ, 1952. 2. Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S. New aspects in numerical quadrature - Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.

УДК 533.6.013.42

Р.І.Мокрик, Ю.О.Пир"єв

ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА АКУСТИЧНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Кожна система середовищ характеризується своїм дисперсійним співвідношенням, яке має важливе значення при розв"язуванні й аналізі стаціонарних і нестаціонарних задач для даної системи середовищ. Частково аналіз властивостей дисперсійних рівнянь проводився в працях [1–7].

Ми розглядаємо дисперсійне рівняння для пружного шару товщиною H, що лежить на рідкому акустичному півпросторі, яке має вигляд

$$\Delta(u,\varkappa)=\lambda A(u,\varkappa,h,\tau_2)+\alpha B(u,\varkappa,h,\tau_2)=0, \qquad /1/$$

$$A(u,\varkappa,h,\tau_2)=\varkappa^4(qC_1S_2-4u^2\beta_1^2C_2S_1), \qquad /2/$$

$$B(u,\varkappa,h,\tau_2)=8u^2q(1-C_1C_2)+(q^2+16\beta_1^2\beta_2^2u^4)S_1S_2, \qquad /3/$$

$$S_m=sh(h\beta_m)/\beta_m,\ C_m=ch(h\beta_m),\ m=1,2,\ q=2u^2-\varkappa^2,$$

$$\beta_1=\sqrt{u^2-\tau_2^2\varkappa^2},\ \beta_2=\sqrt{u^2-\varkappa^2},\ \alpha=\sqrt{u^2-\tau_1^2\varkappa^2},$$

$$\tau_2=c_t/c_e,\ \tau_1=c_t/c,\ \lambda=\rho_0/\rho,\ \varkappa=\omega L/c_t,$$

$$h=H/L,\ u=\sigma+i\tau,\ \varkappa=\varkappa_1+i\varkappa_2,\ \omega=\omega_1+i\omega_2,$$

де c_t, c_e – швидкості поширення хвиль зсуву та розширення в пружному шарі; c – швидкість звуку в рідкому акустичному півпросторі; ρ_0, ρ – відповідно густина рідини та матеріалу пружного шару; L – довільний лінійний параметр; σL^{-1} – параметр перетворення Фур"є або Ханкеля по координаті, напрямленій вздовж границі розподілу середовищ; ω – параметр комплексного перетворення Фур"є по часу у випадку нестаціонарної задачі; ω_1 – частота у випадку стаціонарної задачі.