Список літератури: I. М о р з Ф.М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т.2. - М.: ИЛ, 1952. 2. Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S. New aspects in numerical quadrature - Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.

УДК 533.6.013.42

Р. І. Мокрик, Ю. О. Пир"єв

ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА АКУСТИЧНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Кожна система середовищ характеризується своїм дисперсійним співвідношенням, яке має важливе значення при розв"язуванні й аналізі стаціонарних і нестаціонарних задач для даної системи середовищ. Частково аналіз властивостей дисперсійних рівнянь проводився в працях [1-7].

Ми розглядаємо дисперсійне рівняння для пружного шару товщиною H, що лежить на рідкому акустичному півпросторі, яке має вигляд

$$\Delta(u,\varkappa) = \lambda A(u,\varkappa,h,\tau_2) + \alpha B(u,\varkappa,h,\tau_2) = 0, \qquad /1/$$

$$A(u,\varkappa,h,\tau_2) = \varkappa^4 (q C_1 S_2 - 4u^2\beta_1^2 C_2 S_1), \qquad /2/$$

$$B(u,\varkappa,h,\tau_2) = 8u^2 q(1 - C_1C_2) + (q^2 + 16\beta_1^2\beta_2^2 u^4) S_1 S_2, \qquad /3/$$

$$S_m = sh(h\beta_m)/\beta_m, \quad C_m = ch(h\beta_m), \quad m = 1,2, \quad q = 2u^2 - \varkappa^2,$$

$$\beta_1 = \sqrt{u^2 - \tau_2^2\varkappa^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{u^2 - \varkappa^2}, \quad \alpha = \sqrt{u^2 - \tau_1^2\varkappa^2},$$

$$\tau_2 = c_t/c_e, \quad \tau_1 = c_t/c, \quad \lambda = \rho_0/\rho, \quad \varkappa = \omega L/c_t,$$

$$h = H/L, \quad u = \sigma + i\tau, \quad \varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2, \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2,$$

де c_t, c_e - швидкості поширення хвиль зсуву та розширення в пружному шарі; c - швидкість звуку в рідкому акустичному півпросторі; ρ_0, ρ - відповідно густина рідини та матеріалу пружного шару; L - довільний лінійний параметр; δL^{-1} - параметр перетворення Фур"є або Ханкеля по координаті, напрямленій вздовж границі розподілу середовищ; ω - параметр комплексного перетворення Фур"є по часу у випадку нестаціонарної задачі; ω_1 - частота у випадку стаціонарної задачі.

Через I_+ позначимо верхню половину $\varkappa$ – площини $(Im\varkappa>0)$, через I_- – нижню $(Im\varkappa<0)$, а дійсну вісь $\varkappa$ – площини через I_0. Дисперсійне рівняння /I/ розглядається у комплексній площині $u=\sigma+i\tau$ при фіксованих значеннях комплексного параметра $\varkappa=\varkappa_1+i\varkappa_2$. На основі принципу причинності [9] комплексний параметр повинен належати області I_+.

Вітка функції $\alpha=(u^2-\tau_1^2\varkappa^2)^{0,5}$ вибрана так, щоб при $\sigma\to+\infty$ виконувалось $\alpha\to\sigma$ /верхній лист дволистої рімановоЇ поверхні/. Розрізи для функції α при фіксованому $\varkappa\in I_+\cup I_0$ на дволистій рімановій поверхні $u=\sigma+i\tau$ згідно з принципом причинності задовольняють умову $Re\alpha=0$.

Функції $A(u,\varkappa,h,\tau_2)$ і $B(u,\varkappa,h,\tau_2)$, які визначаються формулами /2/, /3/ є регулярними функціями комплексної змінної u при фіксованих значеннях $\varkappa$ і не залежать від механічних параметрів акустичної рідини. Рівняння $A(u,\varkappa,h,\tau_2)=0$ – дисперсійне рівняння для пружного шару, що лежить без тертя на жорсткому півпросторі [4], рівняння $B(u,\varkappa,h,\tau_2)=0$ – дисперсійне рівняння для пружного шару з вільними границями [I].

Функція $\Delta(u,\varkappa)$ – неперервна функція h, має дві точки галуження $u=\pm\tau_1\varkappa$ $(\varkappa\in I_0\cup I_+)$, які існують при невироджених пружних властивостях півпростору, є парною функцією σ при $\varkappa\in I_+\cup I_0$ та при $|\sigma|>\tau_1|\varkappa_1|$ приймає дійсні значення.

Всі дійсні корені дисперсійного рівняння

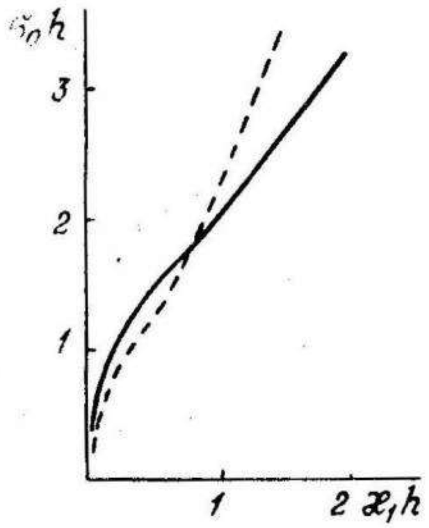
$$\Delta(\sigma,\varkappa_1)=0 \qquad /4/$$

обмежені по $|\sigma|$ зверху [2]. При збільшенні товщини шару H дисперсійне рівняння вироджується в добуток дисперсійного рівняння Релея для пружного півпростору $\Delta_0(\sigma,\varkappa_1,\tau_1)\equiv q-4\beta_1\beta_2\sigma^2=0$ та дисперсійного рівняння $\Delta_1(\sigma,\varkappa_1,\tau_2,\tau_1,\lambda)\equiv\lambda\beta_1\varkappa_1^4+\alpha\Delta_0(\sigma,\varkappa_1,\tau_1)=0$ для пружного й рідкого півпросторів, які знаходяться у контакті.

При $\varkappa\in I_+$ функція $\Delta(u,\varkappa)$ регулярна і не має нулів у деякій смузі, яка містить в собі дійсну вісь комплексної площини $u=\sigma+i\tau$

Якщо $\varkappa \to \varkappa_1 (\varkappa \in I_+ \cup I_0)$, то на дійсній осі комплексної площини $u = \sigma + i\tau$ з"являються нулі і точки галуження, симетричні відносно початку координат. Вважаючи ці нулі аналітичними функціями в околі фіксованого параметра $\varkappa_1$ і використавши їх розклад у ряд Тейлора в цьому околі, можна показати, що нулі σ_n, $n = 0,1,2,\ldots N$ дисперсійного рівняння, які лежать на додатній дійсній осі, зміщуються у верхню півплощину, а на від"ємній дійсній осі – в нижню комплексну півплощину $u (d\sigma_n / d\varkappa_1 > 0)$, коли фіксований параметр $\varkappa \in I_0$ переходить в область I_+.

У випадку "більш швидкого" по відношенню до акустичної рідини пружного шару $(c_\ell > c_t > c)$ на довільних частотах існує тільки один [7] додатний дійсний корінь $\sigma_0 = h^{-1} f(\varkappa_1 h)$ дисперсійного рівняння /4/, залежність якого від $\varkappa_1 h$ ілюструється на рисунку. Штрихова лінія відповідає системі середовищ сталь – вода $\tau_2^2 = 0{,}293$; $\tau_1^2 = 4{,}652$; $\lambda = 0{,}132$, суцільна лінія відповідає системі середовищ лід – вода $\tau_2^2 = 0{,}250$; $\tau_1^2 = 1{,}692$; $\lambda = 1{,}123$. Асимптотою для функції $f(\varkappa_1 h)$ є пряма $\sigma_0 h = V^{-1} \varkappa_1 h$, де V – корінь рівняння $\Delta_1 (1, V, \tau_2, \tau_1, \lambda) = 0$; $V c_t$ – швидкість поверхневої хвилі для пружного та рідкого півпросторів, які знаходяться у контакті.



При $|u/\varkappa| \ll 1$ справедливі такі асимптотичні зображення:

$$A(u, \varkappa, h, \tau_2) = \varkappa^6 (\tau_2^2 - 1) |u| a(|u|h),$$
$$B(u, \varkappa, h, \tau_2) = 4 (\tau_2^2 - 1)^2 u^2 \varkappa^4 b(|u|h), \qquad /5/$$
$$a(t) = sh\, 2t + 2t, \quad b(t) = sh^2 t - t^2,$$

з яких випливає, що при $\varkappa \to 0$ функція $\Delta(u, \varkappa)$ вироджується у функцію, яка входить у знаменник трансформанти розв"язку статичних задач для пружного шару з вільними границями при скінченних або для пружного шару, який лежить без тертя на жорсткому півпросторі [8] при $\lambda \to \infty$.

При довільній частоті $(\varkappa \in I_0 \cup I_+)$, як випливає з /5/, рівняння /I/ має зчисленну множину комплексних коренів, які при $|u| \to \infty$ наближаються до нулів знаменників трансформант розв"язків відповідних статичних задач. Якщо параметр $\varkappa$ задовольняє наступні співвідношення

$$h\varkappa - \pi n = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \varepsilon, \ \varepsilon_2 > 0, \ |\varepsilon| \ll 1, \ n = 1,2,\dots,$$

то дисперсійне рівняння /I/ має корені u_1^n і u_2^n в околі точки $u=0$, і не має їх в протилежному випадку.

Проводячи розклад функції $\Delta(u,\varkappa)$ в околі початку координат, отримуємо для нулів, які лежать поблизу точки $u=0$, такі зображення:

$$u_1^n = (\delta U_- + iU_+)\pi n, \ u_2^n = -u_1^n, \ n = 1,2,\dots,$$

$$U_\pm = \sqrt{(R+X)/2Z}, \ R = \sqrt{X^2+Y^2}, \ Z = K^2 + D^2,$$

$$X = X_1 + X_2, \ Y = Y_1 + Y_2, \ X_1 = M_1 K + G_1 D,$$

$$X_2 = G_2 K - M_2 D, \ Y_1 = M_1 D - G_1 K, \ Y_2 = G_2 D + M_2 K,$$

$$M_k = \lambda(-1)^n \varepsilon_k \cos(\pi n \tau_2), \ G_k = \tau_1 \tau_2^{-1} (-1)^n \varepsilon_k \sin(\pi n \tau_2), \ k = 1,2,$$

$$K = \lambda(-1)^n \left[4\tau_2 \sin(\pi n \tau_2) - 0{,}5\pi n \cos(\pi n \tau_2)\right],$$

$$D = 8\tau_1 \left[1 - (-1)^n \cos(\pi n \tau_2)\right] - \pi n \tau_1 0{,}5(-1)^n \sin(\pi n \tau_2)\tau_2^{-1},$$

$\delta = +1$, якщо $Y<0$ і $\delta = -1$, коли $Y>0$.

При кожному фіксованому n нулі розташовані симетрично відносно початку координат і при $\varepsilon = 0$ зливаються у нуль другого порядку. У зв"язку з симетрією нулів прослідкуємо тільки за нулем u_1^n, для якого завжди $Im u_1^n > 0$. Аналіз показує, що залежно від того, по якому напрямку наближається параметр $\varkappa \in I_0 \cup I_+$ до значень $h\varkappa = \pi n$, $n = 1,2,\dots$, нуль u_1^n може лежати правіше або лівіше осі $\sigma = 0$. Наприклад, коли $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 < 0$, то нуль лежить лівіше осі $\sigma = 0$ і при $n \to \infty$ наближається до додатної осі $\tau = 0$, а при $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 > 0$ нуль лежить правіше осіб $\sigma = 0$ і при $n \to \infty$ наближається до додатної осі $\tau = 0$.

Аналогічні дослідження можна провести і для від"ємних значень параметрів $h\varkappa = \pi n$, $n = -1, -2, \dots$.

Список літератури: I. Б а б е ш к о В.А. Об условиях излучения для упругого слоя. – ДАН СССР, 1973, т.213, № 3. 2. Б о б р о в и ц к и й Ю.И. Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе. – Акуст.журнал, 1977, т.23, вып.I. 3. Б р е х о в с к и х Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. 4. Б ы р д и н В.М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца.–ДАН СССР, 1978, т.238, № 2. 5. В о р о в и ч И.И., А л е к с а н д р о в В.М., Б а б е ш к о В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. 6. К е й л и с - Б о р о к В.И. Интерференционные поверхностные волны. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. 7. К р а с и л ь н и к о в В.Н. Некоторые свойства волновых процессов в жидком полупространстве, ограниченном упругим слоем. – Проблемы дифракции и распространения волн, 1965, № 4. 8. М о л о т к о в Л.А. К вопросу о колебаниях тонкого упругого слоя, заключенного между двумя упругими полупространствами. – В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Харьков, 1970. 9. М о к р и к Р.И., Б а р а н В.П. Об условии излучения в динамических задачах теории упругости. – ДАН АН УССР, серия А, 1977, № 8.

УДК 539.3II

В.К.Опанасович, М.С.Драган

КРУЧЕННЯ ПЛИТИ З ТОНКОСТІННИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити товщиною $2h$ з тонкостінним пружним включенням довжини 2а і ширини 2в, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого на безмежності скручуючого моменту H_{xy}^{∞} /рис.I/.

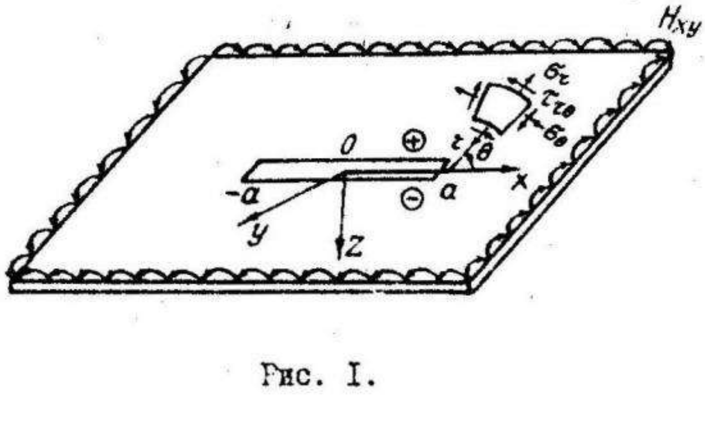


Рис. I.