Список літератури: I. Б а б е ш к о В.А. Об условиях излучения для упругого слоя. - ДАН СССР, 1973, т.213, № 3. 2. Б о б р о в и ц к и й Ю.И. Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе. - Акуст.журнал, 1977, т.23, вып.I. 3. Б р е х о в с к и х Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. 4. Б ы р д и н В.М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца.-ДАН СССР, 1978, т.238, № 2. 5. В о р о в и ч И.И., А л е к с а н д р о в В.М., Б а б е ш к о В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 6. К е й л и с - Б о р о к В.И. Интерференционные поверхностные волны. - М.: Изд-во АН СССР, 1960. 7. К р а с и л ь н и к о в В.Н. Некоторые свойства волновых процессов в жидком полупространстве, ограниченном упругим слоем. - Проблемы дифракции и распространения волн, 1965, № 4. 8. М о л о т к о в Л.А. К вопросу о колебаниях тонкого упругого слоя, заключенного между двумя упругими полупространствами. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Харьков, 1970. 9. М о к р и к Р.И., Б а р а н В.П. Об условии излучения в динамических задачах теории упругости. - ДАН АН УССР, серия А, 1977, № 8.

УДК 539.3II

В.К.Опанасович, М.С.Драган

КРУЧЕННЯ ПЛИТИ З ТОНКОСТІННИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити товщиною $2h$ з тонкостінним пружним включенням довжини 2а і ширини 2в, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого на безмежності скручуючого моменту H_{xy}^{∞} /рис.I/.

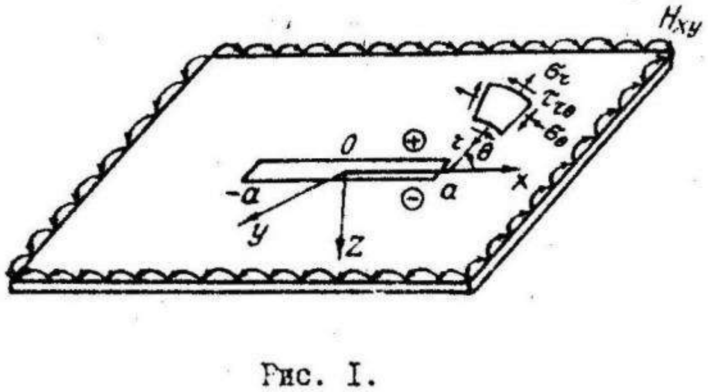


Рис. I.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, будемо позначати індексом "0", а знаками плюс і мінус – граничні значення функцій відповідно на верхньому і нижньому березі включення, сегмент дійсної осі $[-a, a]$ – через L.

Припускаємо, що на берегах включення такі умови контакту:

$$(M_y)_0^{\pm}=(M_y)^{\pm}; \qquad \left(N_y+\frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_0^{\pm}=\left(N_y+\frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)^{\pm}; \qquad /I/$$
$$W_0^{\pm}=W^{\pm}; \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0^{\pm}=\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^{\pm}.$$

При відсутності зовнішнього нормального навантаження, напружений стан ізотропної плити можна виразити через дві функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ за формулами [3]

$$\varkappa\Phi(z)-\Omega(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}=-\frac{1}{D(1-\nu)}f+iC, \qquad /2/$$
$$\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}=\frac{\partial g}{\partial x},$$

де

$$f=M_y+i\left(H_{xy}+\int_{-a}^{x}N_y(x)dx\right); \quad g=i\left(\frac{\partial W}{\partial y}+i\frac{\partial W}{\partial x}\right);$$
$$\Omega(z)=\bar\Phi(z)+z\bar\Phi'(z)+\bar\Psi(z);$$
$$D=2Eh^3/3(1-\nu^2); \quad \varkappa=(3+\nu)/(1-\nu);$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; C – невідома постійна.

Застосовуючи до області включення формули /2/, нехтуючи при цьому величинами вищих порядків малості порівняно з b і зносячи деякі вирази з берегів включення на вісь OX, можемо записати

$$f_0^+-f_0^-=-2ib\,D_0(1-\nu_0)K_2'(x) \qquad x\in L,$$
$$f_0^++f_0^-=\frac{2D_0(1-\nu_0)}{(1+\varkappa_0)}\left[2\varkappa_0K_1(x)+(\varkappa_0-1)K_2(x)\right] \quad x\in L, \qquad /3/$$
$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^++\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^-=\frac{2}{(1+\varkappa_0)}\left[(1-\varkappa_0)K_1(x)+2K_2(x)\right] \quad x\in L,$$
$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^+-\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^-=2ibK_1'(x) \quad x\in L,$$

де $K_i(x)\ (i=1,2)$ – невідомі функції.

Для пластинки граничні умови /I/ з берегів включення знесемо на вісь OX. На основі співвідношень /I/, /2/ і /3/ отримаємо наступні крайові задачі для знаходження функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$[\Phi(x)-\Omega(x)]^{+}-[\Phi(x)-\Omega(x)]^{-}=2i b K_1'(x) \quad x\in L,$$
$$[\varkappa\Phi(x)+\Omega(x)]^{+}-[\varkappa\Phi(x)+\Omega(x)]^{-}=2\frac{\mu_0}{\mu} i b K_2'(x) \quad x\in L; \qquad /4/$$

$$\varkappa[\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)]-[\Omega^{+}(x)+\Omega^{-}(x)]=\frac{2\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}[2\varkappa_0 K_1(x)+$$
$$+(\varkappa_0-1)K_2(x)]+iC \quad x\in L,$$
$$[\Phi(x)+\Omega(x)]^{+}+[\Phi(x)+\Omega(x)]^{-}=\frac{2}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K_1(x)+2K_2(x)] \quad x\in L, \qquad /5/$$

де μ,μ_0 – постійні Ляме. Поза L стрибки відсутні.

Розв"язуючи задачі лінійного спряження /4/, отримуємо

$$\Phi(z)=\frac{b}{\pi(1+\varkappa)}\left[\int_{-a}^{a}\frac{K_1'(t)dt}{t-z}+\frac{\mu_0}{\mu}\int_{-a}^{a}\frac{K_2'(t)dt}{t-z}\right],$$
$$\Omega(z)=\frac{b}{\pi(1+\varkappa)}\left[-\varkappa\int_{-a}^{a}\frac{K_1'(t)dt}{t-z}+\frac{\mu_0}{\mu}\int_{-a}^{a}\frac{K_2'(t)dt}{t-z}\right]+\overline{\Gamma}'; \qquad /6/$$

де $\Gamma'=i H_{xy}^{\infty}/D(1-\nu)$.

Підставляючи вирази функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ /6/ у співвідношення /5/, одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь типу Прандтля для визначення невідомих функцій $K_i(x)$ $(i=1,2)$

$$\frac{1}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K_1(x)+2K_2(x)]-\frac{b(1-\varkappa)}{\pi(1+\varkappa)}\int_{-a}^{a}\frac{K_1'(t)dt}{t-x}-$$
$$-\frac{2b\mu_0}{\pi\mu(1+\varkappa)}\int_{-a}^{a}\frac{K_2'(t)\,dt}{t-x}=\overline{\Gamma}' \quad x\in L, \qquad /7/$$
$$\frac{\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}[2\varkappa_0K_1(x)+(\varkappa_0-1)K_2(x)]-\frac{2b\varkappa}{\pi(1+\varkappa)}\int_{-a}^{a}\frac{K_1'(t)dt}{t-x}-$$
$$-\frac{\mu_0 b(\varkappa-1)}{\mu(\varkappa+1)}\int_{-a}^{a}\frac{K_2'(t)dt}{t-x}=-\overline{\Gamma}'-iC \quad x\in L.$$

Розв"язок системи рівнянь /7/ будемо шукати у вигляді [1].

$$K_i(ax)=K_{0i}-\sqrt{1-x^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}X_{mi}U_{m-1}(x) \quad (i=1,2), \qquad /8/$$

де K_{0i}, X_{mi} $(i=1,2)$ – невідомі коефіцієнти; $T_m(x)$, $U_m(x)$ – поліноми Чебишова відповідно першого та другого роду.

Використовуючи співвідношення /8/ із формул /6/, записуємо

$$\Phi(z)=-\frac{b}{a(1+\varkappa)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(X_{m1}+\frac{\mu_0}{\mu}X_{m2}\right)\left[\frac{aT_m(\frac{z}{a})}{\sqrt{z^2-a^2}}-U_{m-1}(\tfrac{z}{a})\right], \qquad /9/$$
$$\Omega(z)=\frac{b}{a(1+\varkappa)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varkappa X_{m1}-\frac{\mu_0}{\mu}X_{m2}\right)\left[\frac{aT_m(\frac{z}{a})}{\sqrt{z^2-a^2}}-U_{m-1}(\tfrac{z}{a})\right]+\overline{\Gamma}'.$$

Підставляючи співвідношення /8/ у /7/ і використовуючи результати праці [I], отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу $X_{m\tau}$ $(\tau=1,2)$

$$\frac{2}{(1+\varkappa_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}H(m,n)\left[(1-\varkappa_0)X_{m1}+2X_{m2}\right]+C_1X_{n1}+C_2X_{n2}=A_n,$$
$$\frac{2\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}H(m,n)\left[2\varkappa_0X_{m1}+(\varkappa_0-1)X_{m2}\right]+C_3X_{n1}+C_4X_{n2}=B_n, \qquad /I0/$$

де

$$H(m,n)=\begin{cases}0, \text{ якщо } m+n \text{ - непарне;}\\ \dfrac{1}{(m+n+1)(m+n-1)}-\dfrac{1}{(m-n+1)(m-n-1)}, \text{якщо } m+n \text{ парне:}\end{cases}$$

$$A_1=\pi(A_0+\bar{\Gamma}'); \; B_1=(\bar{\Gamma}'+B_0+iC)\cdot\pi; \; A_n=B_n=0, \; n\geqslant 2;$$

$$A_0=\frac{1}{(1+\varkappa_0)}\left[(1-\varkappa_0)K_{01}+2K_{02}\right]; \; B_0=\frac{1}{(1+\varkappa_0)}\left[2\varkappa_0K_{01}+(\varkappa_0-1)K_{02}\right]\frac{\mu_0}{\mu};$$

$$C_1=\frac{\pi b(1-\varkappa)}{a(1+\varkappa)}; \; C_2=\frac{2\pi b\mu_0}{a\mu(1+\varkappa)}; \; C_3=\frac{2\pi b\varkappa}{a(1+\varkappa)}; \; C_4=\frac{\pi b\mu_0(\varkappa-1)}{a\mu(1+\varkappa)}.$$

Аналогічно [5] постійні A_0 і B_0 візьмемо у вигляді

$$A_0=\bar{\Gamma}'\left[\frac{\min(\mu_0,\mu)}{\mu_0}\right]^{1/2}; \; B_0=-\bar{\Gamma}'\left[\frac{\min(\mu_0,\mu)}{\mu}\right]^{1/2},$$

а постійну C знайдемо з умови [3]

$$\operatorname{Re}\int_{-a}^{a}\left[(\varphi-\omega)^{+}-(\varphi-\omega)^{-}\right]dt=0, \qquad /II/$$

де $\varphi(z)=\int\Phi(z)dz$; $\omega(z)=\int\Omega(z)dz$.

Враховуючи формули /6/, після нескладних перетворень із співвідношення /II/ отримуємо

$$J_m X_{11}=0. \qquad /I2/$$

Г.Т.Сулим вважає, що для тонкостінних включень існують чотири коефіцієнти інтенсивності напружень. Дійсно, якщо проробити подібні викладки, як у монографії [4], то розподіл напружень в околі кінця включення буде виражатись через чотири коефіцієнти інтенсивності напружень і в полярній системі координат r, θ буде мати вигляд

$$\sigma_r = \frac{1}{4\varkappa\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[\cos\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]K_1 - \left[3\sin\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]K_2 + \right.$$

$$\left. + \left[-(1+2\varkappa)\cos\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]K_3 - \left[(1-2\varkappa)\sin\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]K_4\right\}\frac{z}{h},$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{4\varkappa\sqrt{2\pi r}}\,\frac{z}{h}\left\{\left[\cos\tfrac{3}{2}\theta - \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]K_1 + \left[-3\sin\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]K_2 - \right.$$

$$\left. - \left[(1+2\varkappa)\cos\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]K_3 + \left[-(1-2\varkappa)\sin\tfrac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]K_4\right\},$$

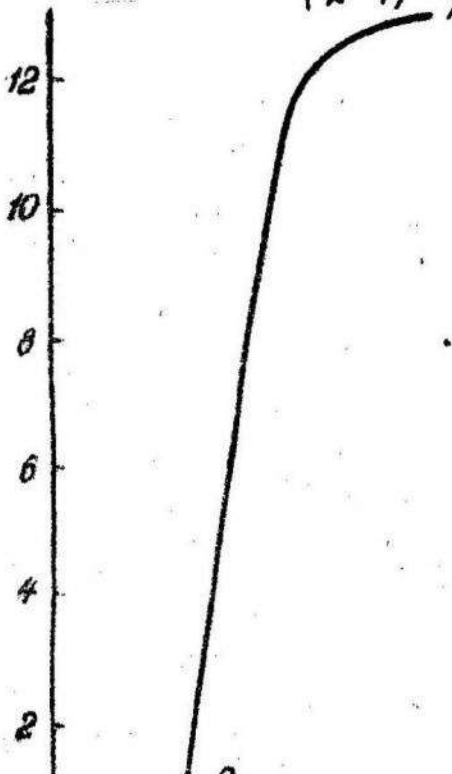
$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{4\varkappa\sqrt{2\pi r}}\,\frac{z}{h}\left\{\left(\sin\tfrac{3}{2}\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)K_1 + \left(3\cos\tfrac{3}{2}\theta + \cos\frac{\theta}{2}\right)K_2 + \right.$$

$$\left. + \left[-(1+2\varkappa)\sin\tfrac{3}{2}\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right]K_3 + \left[(1-2\varkappa)\cos\tfrac{3}{2}\theta + \cos\frac{\theta}{2}\right]K_4\right\},$$

де K_i $(i=1,2,3,4)$ – коефіцієнти інтенсивності напружень, які знаходяться за формулами

$$K_1 - iK_2 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\frac{\varkappa b E h M_0}{\mu(\varkappa-1)}\sum_{m=1}^{\infty} Y_m\,; \qquad /14/$$

$$K_3 - iK_4 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\frac{b\varkappa E h}{(\varkappa-1)}\sum_{m=1}^{\infty} X_m\,.$$



Переходячи у системі /10/ і співвідношеннях /7/ до границі при $M_0 \to 0$, $M_0 \to \infty$ і $M_0 \to M$, одержуємо граничні випадки відповідно для тріщини, жорсткого включення і суцільної площини, які збігаються з ров"язками, наведеними у працях [2, 3].

На ЕОМ М-222 проведено числовий аналіз задачі, результати якого показані на рис. 2. Система рівнянь /10/, яка буде квазірегулярною, розв"язували методом редукції, тобто у розкладі /8/ брали скінченне число членів N. Обчислення проводили

Рис. 2.

при таких значеннях параметрів: $b/a = 0{,}1$, $\nu = \nu_0 = 1/3$ і різній відносній жорсткості $k = \mu_0 / \mu$. Кривій I відповідає залежність $(-h^2 K_2 / \sqrt{a} H_{xy}^{\infty})$, а кривій 2 – $(-h^2 K_1 / \sqrt{a} H_{xy}^{\infty})$. Зауважимо, що в даному випадку $K_I = K_3 = 0$.

Список літератури: I. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. – Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып.I. 2. Меркулов В.А. Изгиб пласти с разрезами вдоль прямой или дуг окружности. – Механика твердого тела, 1975, № 3. 3. Морарь Г.А. Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. – Прикладная математика и механика, 1970, 34, № 3. 4. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит БГУ им.В.И.Ленина. Минск, 1975. 5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974.

УДК 539.3II

М.С.Драган

ЗГИН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ПРЯМОЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу консольної балки довжиною $2L$, висотою $2H$ і товщиною 2τ з тонкостінним пружним включенням довжиною 2ℓ і шириною $2h$, яка знаходиться під дією зосередженої сили Q /рис. I/.

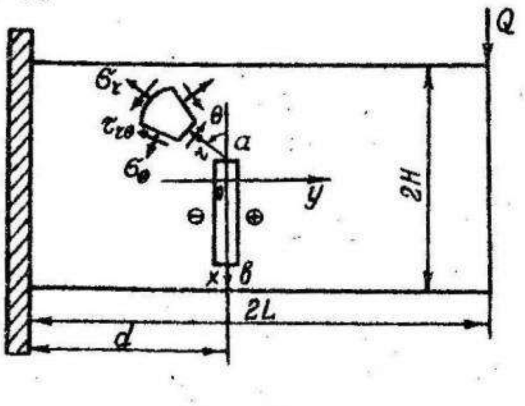


Рис. I.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, будемо позначати індексом "0", значками плюс і мінус – граничні значення функцій на верхньому і нижньому берегах включення, сегмент дійсної осі [а, в]– через W .