

при таких значеннях параметрів: $b/a = q_1$, $\nu = \nu_0 = 1/3$ і різній відносній жорсткості $K = M_0/M$. Кривій 1 відповідає залежність $(-h^2 K_2 / \sqrt{a} H_{xy}^\infty)$, а кривій 2 — $(-h^2 K_1 / \sqrt{a} H_{xy}^\infty)$. Зауважимо, що в даному випадку $K_1 = K_3 = 0$.

Список літератури: 1. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. — Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. I. 2. М е р - к у л о в В.А. Изгиб пласти с разрезами вдоль прямой или дуг окружности. — Механика твердого тела, 1975, № 3. 3. М о р а р ь Г.А. П о п о в Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — Прикладная математика и механика, 1970, 34, № 3. 4. П р у с о в И.А. Метод сопряжения в теории плит БГУ им. В.И. Ленина. Минск, 1975. 5. Ч е р е п а н о в Г.Ц. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.

УДК 539.311

М.С. Драган

ЗГІН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ПРЯМОЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу консольної балки довжиною $2L$, висотою $2H$ і товщиною 2τ з тонкостінним пружним включенням довжиною 2ℓ і шириною $2h$, яка знаходиться під дією зосередженої сили Q /рис. I/.

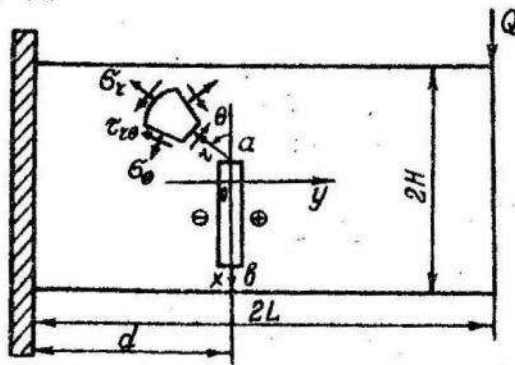


Рис. I.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, будемо позначати індексом "0", значками плюс і мінус — граничні значення функцій на верхньому і нижньому берегах включення, сегмент дійсної осі $[a, b]$ — через W .

Вважаємо, що на берегах включення такі умови:

$$\begin{aligned} (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ &= (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+, \\ (u + iV)_0^+ &= (u + iV)_0^+. \end{aligned} \quad /1/$$

Балку розглядаємо як нескінченну пластинку [3], тоді напружено-деформований стан цієї балки /пластинки/ можна виразити через дві функції комплексної змінної за формулами

$$\begin{aligned} \phi_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu(u + iV) &= \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad /2/$$

і, крім того, при великих $|z|$ функції $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ можемо зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= A_1 z^2 + A_2 z + O\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi_0(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \\ \Omega(z) &= B_1 z^2 + B_2 z + B_3 + O\left(\frac{1}{z}\right) = \Omega_0(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned} \quad /3/$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= -iQ/8J; \quad A_2 = -Q(2L-d)/4J; \quad B_1 = 5iQ/8J; \\ B_2 &= -3Q(2L-d)/4J; \quad B_3 = -iQH^2/2J; \quad J = 4\pi H^3/3. \end{aligned} \quad /4/$$

Оскільки розглядається тонкостінне включення, то, нехтуючи величинами вищих порядків малості порівняно з h і зносячи деякі члени з берегів включення на вісь OX , на підставі (2) можемо записати

$$\begin{aligned} (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ - (\phi_y - i\tau_{xy})_0^- &= 2ihK'(x) \quad x \in W, \\ (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ + (\phi_y - i\tau_{xy})_0^- &= \frac{2}{(1+x_0)} [(1-x_0)K(x) + 2M(x)] \quad x \in W, \\ (u + iV)_0^+ + (u + iV)_0^- &= \frac{1}{\mu_0(1+x_0)} [2x_0K(x) + (x_0-1)M(x)] \quad x \in W, \\ (u + iV)_0^+ - (u + iV)_0^- &= \frac{ih}{\mu_0} M'(x) \quad x \in W, \end{aligned} \quad /5/$$

де $K(x)$ і $M(x)$ - невідомі функції.

Для пластинки граничні умови з берегів включення зносимо на вісь OX таким чином, щоб з розв'язку задачі можна було отримати граничні випадки тріщини, жорсткого включення і однорідної балки. Виходячи із (1), використовуючи (2) і (5), одержимо такі крайові задачі:

$$[\Phi(x) - \Omega(x)]^+ [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = 2\tau h K'(x) - 2K_1(x) \quad x \in W,$$

$$[\chi \Phi(x) - \Omega(x)]^+ [\chi \Phi(x) + \Omega(x)]^- = \frac{2\mu}{\mu_0} \tau h M'(x) - 2M_1(x) \quad x \in W, \quad /6/$$

$$[\Phi(x) + \Omega(x)]^+ [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = \frac{2}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0)K(x) + 2M(x)] \quad x \in W,$$

$$\chi [\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] = \frac{2\mu}{\mu_0(1+\chi_0)} [2\chi_0 K(x) + (\chi_0 - 1)M(x)] \quad x \in W, \quad /7/$$

де

$$K_1(x) = \tau h [2(A_1 - B_1)x + (A_2 - B_2)] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu},$$

$$M_1(x) = \tau h [2(\chi A_1 + B_1)x + (\chi A_2 + B_2)] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}. \quad /8/$$

Розв'язуючи задачу лінійного спряження (6), одержуємо

$$\Phi(z) = \frac{h}{\pi(1+\chi)} \left[\int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-z} dt \right] + \Phi_0(z), \quad /9/$$

$$\Omega(z) = \frac{h}{\pi(1+\chi)} \left[-\chi \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-z} dt \right] + \Omega_0(z),$$

де $K_2(x) = K_1(x)/\tau h$, $M_2(x) = \mu_0 M_1(x)/\mu \tau h$. /10/

Виходячи із (7) і враховуючи (9), дістаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Прандтля для визначення невідомих функцій $K(x)$ і $M(x)$

$$\frac{1}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0)K(x) + 2M(x)] - \frac{h(1-\chi)}{\pi(1+\chi)} \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-x} dt -$$

$$- \frac{2h\mu}{\mu_0(1+\chi)} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-x} dt = \Phi_0(x) + \Omega_0(x) \quad x \in W, \quad /11/$$

$$\frac{\mu}{\mu_0(1+\chi_0)} [2\chi_0 K(x) + (\chi_0 - 1)M(x)] - \frac{2h\chi}{\pi(1+\chi)} \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-x} dt -$$

$$- \frac{h\mu(\chi - 1)}{\pi\mu_0(1+\chi)} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-x} dt = \chi \Phi_0(x) - \Omega_0(x) \quad x \in W.$$

Розв'язок системи (II) шукаємо у вигляді [I]

$$K(x_1) = K_0 + \chi_0 \arcsin x + K_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m T_m(x),$$

$$M(x_1) = M_0 + \chi_0 \arcsin x + M_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m T_m(x),$$

де $\chi_1 = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$, $K_3(x) = [(A_1 - B_1)x^2 + (A_2 - B_2)x] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}$;

$$M_3(x) = [(\chi A_1 + B_1)x^2 + (\chi A_2 + B_2)x] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu};$$

/13/

K_0, M_0, X_m, Y_m - невідомі коефіцієнти; $T_m(x)$ і $U_m(x)$ - поліноми Чебишова відповідно першого і другого роду.

Підставляючи (12) у (9), одержуємо формули для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= + \frac{2h}{(b-a)(1+x)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m + \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \right. \\ &\quad \left. - U_{m-1}(z_1) \right] + \Phi_0(z), \\ \Omega(z) &= \frac{2h}{(b-a)(1+x)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(x X_m - \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - U_{m-1}(z_1) \right] + \Omega_0(z), \end{aligned} \quad /14/$$

де $z = \left(\frac{b-a}{2} \right) z_1 + \frac{a+b}{2},$

враховуючи (3), $X_0 = Y_0 = 0.$

Підставляючи вирази (12) у співвідношення (11), дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу X_m і Y_m

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [(1-x_0) X_m + 2 Y_m] + C_1 X_n + C_2 Y_n &= D_n, \\ \frac{2\mu}{\mu_0(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [2x_0 X_m + (x_0-1) Y_m] + C_3 X_n + C_4 Y_n &= P_n, \end{aligned} \quad /15/$$

де

$$H(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m+n - \text{непарне,} \\ \frac{1}{(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{(m-n+1)(m-n-1)}, & \text{якщо } m+n - \text{парне;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi h (1-x)}{(b-a)(1+x)}, C_2 = \frac{2\pi h \mu}{\mu_0(1+x)(b-a)}, C_3 = \frac{2\pi h x}{(b-a)(1+x)}, C_4 = \frac{\pi h \mu (x-1)}{(b-a)\mu_0(1+x)}, \\ D_0 &= \frac{1}{(1+x_0)} [(1-x_0) K_0 + 2 M_0], P_0 = \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} [2x_0 K_0 + (x_0-1) M_0], \\ D_n &= \int_{-1}^1 [-\Omega_0(x_1) - x \Phi_0(x_1) + \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} ((1-x_0) K_3(x_1) + 2 M_3(x_1)) + D_0] \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx, \\ P_n &= \int_{-1}^1 [\Omega_0(x_1) - x \Phi_0(x_1) + \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} (2x_0 K_3(x_1) + (x_0-1) M_3(x_1)) + P_0] \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx. \end{aligned} \quad /16/$$

Постійні D_0 і $Re P_0$ беремо у такому вигляді:

$$D_0 = B_3 \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad Re P_0 = -Re B_3 \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad /17/$$

а постійну $J_m \rho_0$ знаходимо з умови [5]

$$\operatorname{Re} \int_{\Lambda} z [\bar{\Omega}(z) + \Phi(z)] dz = 0, \quad /18/$$

де Λ - область включення.

Враховуючи формули (14), після нескладних перетворень із співвідношення (18) маємо $J_m \chi_1 = 0$. /19/.

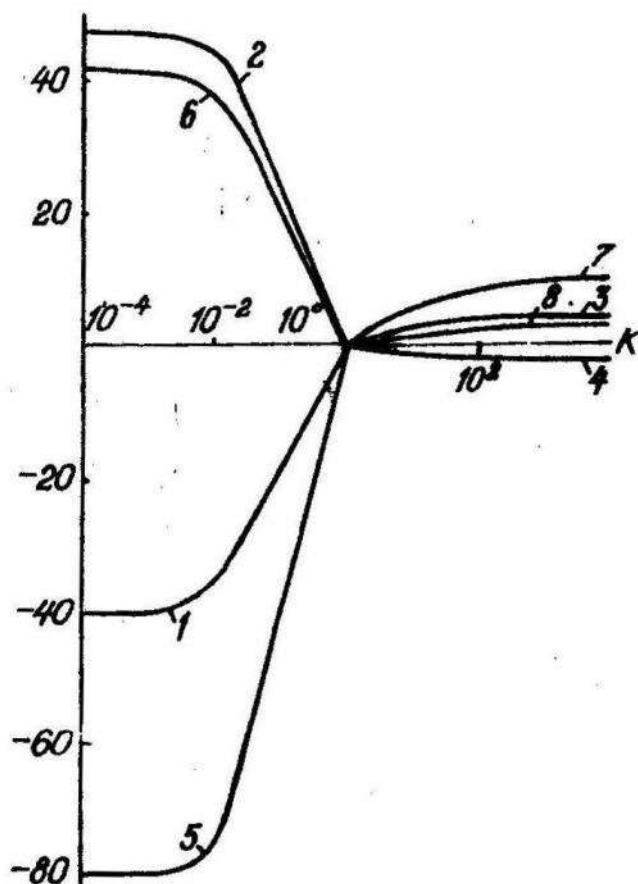


Рис. 2.

Напружений стан в околі кінця включення в полярній системі координат /рис.1/ можна описати такими формулами [4]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_1}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \\ 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3}{2}\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + \frac{K_2}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3}{2}\theta \\ -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3}{2}\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + /20/$$

$$+ \frac{K_3}{4\sqrt{2\tau}} \begin{bmatrix} 5\cos\frac{\theta}{2} + (1+2x)\cos\frac{3}{2}\theta \\ 3\cos\frac{\theta}{2} - (1+2x)\cos\frac{3}{2}\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} - (1+2x)\sin\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + \frac{K_4}{4\sqrt{2\tau}} \begin{bmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2} + (1-2x)\sin\frac{3}{2}\theta \\ -3\sin\frac{\theta}{2} - (1-2x)\sin\frac{3}{2}\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} + (1-2x)\cos\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + O(\tau^0),$$

де K_i ($i=1,2,3,4$) - коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються за формулами

$$K_1^j - iK_2^j = -\frac{2hM}{M_0(1+x)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} y_m,$$

$$K_3^j - iK_4^j = -\frac{2h}{(1+x)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} x_m; \quad /2I/$$

$j=1$ - для точки a ; $j=2$ - для точки b .

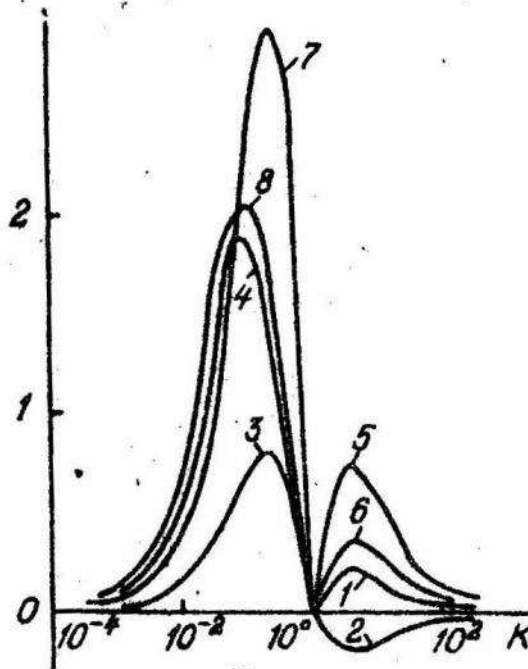


Рис. 3.

На ЕОМ М-222 проведено числовий аналіз розв'язку задачі, результати якого показані на рис. 2, 3. Обчислення проводили при таких значеннях параметрів: $h/a = 0,2$; $b/a = 5$; $(2L-d)/a = 20$; $H/a = 10$ і різних відносній жорсткості $K = M_0/M$. На рис. 2, 3 зображена графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$JK_i^j / \sqrt{2} Q a^{5/2} \quad (i=1,2,3,4).$$

Криві 1-4 відповідають точці a ($j=1$), криві 1'-4' - точці b ($j=2$).

Список літератури: 1. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. - Прикладная математика и механика, 1970, т.34, вып.3. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 3. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. - К.: Наукова думка, 1968. 4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976.

УДК 534.III

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудзяний
НЕЛІНІЙНІ ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ БАЛКИ
ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вивчення поздовжніх коливань балки зі змінними геометричними та фізико-механічними характеристиками при врахуванні розсіювання енергії у матеріалі зводиться до побудови і дослідження розв'язку диференціального рівняння вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - b(x, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \Phi(u) + \varepsilon q(x) \cos \theta, \quad /1/$$

де $u = u(x, t)$ - переміщення перерізу балки з абсцисою x в момент часу t ; $a(x, \tau) = E(x, \tau)F(x)$; $b(x, \tau) = \rho(x, \tau)F(x)$; $E(x, \tau)$ - модуль Юнга; $F(x)$ - площа поперечного перерізу балки; $\rho(x, \tau)$ - густина; $\Phi(u)$ - деякий нелінійний функціонал, що враховує розсіювання енергії у матеріалі балки при коливаннях; $\varepsilon q(x)$ - збурююча сила; $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ - її миттєва частота; $\tau = \varepsilon t$ - повільний час; ε - малий параметр. При цьому робимо такі припущення: параметри балки мало змінюються за період коливань, і тому її можна розглядати як систему з повільно змінними параметрами; зміна геометричних характеристик в часі незначна і нею можна знехтувати. Це дає змогу вважати незалежною від τ форму коливань, тобто приймати її рівною виразу в деякий фіксований момент часу [1].

Враховуючи слабку нелінійність рівняння /1/, його розв'язок знаходимо асимптотичним методом [2]. Для випадку основного резонансу