Список літератури: I. М о р а р ь Г.А., П о п о в Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. - Прикладная математика и механика, 1970, т.34, вып.3. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 3. П а н а с ю к В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. - К.: Наукова думка, 1968. 4. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц и ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976.

УДК 534.III

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудяний

НЕЛІНІЙНІ ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ БАЛКИ ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вивчення поздовжніх коливань балки зі змінними геометричними та фізико-механічними характеристиками при врахуванні розсіювання енергії у матеріалі зводиться до побудови і дослідження розв"язку диференціального рівняння вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-b(x,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varepsilon\,\Phi(u)+\varepsilon q(x)\cos\theta, \qquad /I/$$

де $u=u(x,t)$ - переміщення перерізу балки з абсцисою x в момент часу t ; $a(x,\tau)=E(x,\tau)F(x)$; $b(x,\tau)=\rho(x,\tau)F(x)$; $E(x,\tau)$ - модуль Юнга; $F(x)$ - площа поперечного перерізу балки; $\rho(x,\tau)$ - густина; $\Phi(u)$ - деякий нелінійний функціонал, що враховує розсіювання енергії у матеріалі балки при коливаннях; $\varepsilon q(x)$ - збурююча сила; $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$ - її миттєва частота; $\tau=\varepsilon t$ - повільний час; ε - малий параметр. При цьому робимо такі припущення: параметри балки мало змінюються за період коливань, і тому її можна розглядати як систему з повільно змінними параметрами; зміна геометричних характеристик в часі незначна і нею можна знехтувати. Це дає змогу вважати незалежною від τ форму коливань, тобто приймати її рівною виразу в деякий фіксований момент часу [I] .

Враховуючи слабку нелінійність рівняння /I/, його розв"язок знаходимо асимптотичним методом [2]. Для випадку основного резонансу перше наближення розв"язку подаємо у вигляді

$$u(x,t)=V(x)a\cos\varphi+\varepsilon u_1(x,\varphi,\psi), \qquad /2/$$

де $\varphi=\theta+\psi$, причому амплітуда a і фаза ψ зв"язані співвідношеннями

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi), \qquad /3/$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)+\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi). \qquad /4/$$

Для визначення функцій $V(x)$, $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$ із /I/, враховуючи /2/ – /4/, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dx}\left[a(x,\tau)\frac{dV(x)}{dx}\right]+\omega^2(\tau)b(x,\tau)V(x)=0, \qquad /5/$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,\tau)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]-\omega^2(\tau)b(x,\tau)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}=b(x,\tau)V(x)\Big\{\Big[(\omega(\tau)-$$

$$-\nu(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2a\omega(\tau)B_1\Big]\cos\varphi-\Big[(\omega(\tau)-\nu(\tau)a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+$$

$$+2\omega(\tau)A_1+a\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\Big]\sin\varphi\Big\}+\Phi_0(aV(x)\cos\varphi)+q(x)\cos\theta. \qquad /6/$$

Рівняння /5/ з межовими умовами конкретної задачі служить для визначення функції деформації $V(x)$ і частоти власних коливань $\omega(\tau)$. Зауважимо, що отримати його точний розв"язок не завжди вдається. Тому надалі вважатимемо, що коефіцієнти $a(x,\tau)$ і $b(x,\tau)$ можна подати у вигляді відомих сум

$$a(x,\tau)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n a_n(x,\tau)\right];\quad b(x,\tau)=b_0\left[1+\sum_{m=1}^{N_1}\delta_m b_m(x,\tau)\right]. \qquad /7/$$

Переміщення $V(x)$ і частоту $\omega(\tau)$ вигідно шукати у вигляді асимптотичних розкладів

$$V(x)=V_0(x)+\sum\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}\delta_1^{\beta_1}\ldots\delta_m^{\beta_m}V_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_m}(x), \qquad /8/$$

$$\omega(\tau)=\omega_0+\sum\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}\delta_1^{\beta_1}\ldots\delta_m^{\beta_m}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_m}(\tau), \qquad /9/$$

де $\sum$ – означає сумування по індексах $\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_m$ від 0 до ∞, причому одночасно вони не дорівнюють нулеві.

Беручи до уваги /7/ – /9/, розв"язок однорідного рівняння із змінними коефіцієнтами /5/ зводимо до послідовного розв"язування неоднорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + \omega_0^2 b_0 V_0(x) = 0, \qquad /10/$$

$$a_0 \frac{d^2 V_{\nabla i}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{\nabla i} = -2b_0 \omega_0 \omega_{\nabla i} V_0(x) - a_0 \left(\frac{da_i}{dx}\frac{dV_0}{dx} + a_i \frac{d^2 V_0}{dx^2}\right), \qquad /11/$$

$$a_0 \frac{d^2 V_{\nabla j+N}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{\nabla j+N} = -b_0 \omega_0 [2\omega_{\nabla j+N} + \omega_0 b_j(x,\tau)] V_0(x), \qquad /12/$$

$$/j = 1, \ldots, N)$$

де ∇n – індекс, в якому на i -му місці стоїть одиниця, а на всіх інших – нулі.

Знайшовши $V_0(x)$ і ω_0 з рівняння /10/, можемо отримати вирази для поправок, що дозволяють уточнити частоту та прогин у першому наближенні по всіх параметрах. Спочатку, користуючись співвідношення

$$\int_0^\ell \left[a_0 \frac{d^2 V_{\nabla i}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{\nabla i}\right] V_0(x)\,dx = 0, \qquad /13/$$

з /11/ і /12/ знаходимо

$$\omega_{\nabla i} = -\frac{a_0}{R_0}\int_0^\ell \left(\frac{da_i}{dx}\frac{dV_0}{dx} + a_i \frac{d^2 V_0}{dx^2}\right) V_0(x)\,dx, \qquad /14/$$

$$\omega_{\nabla j+N} = -\frac{\omega_0^2 b_0}{R_0}\int_0^\ell b_j(x,\tau) V_0^2(x)\,dx, \qquad /15/$$

де $R_0 = b_0 \omega_0 \int_0^\ell V_0^2(x)\,dx$; $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, N_1$. Після цього можна знайти вирази для $V_{\nabla i}$ і $V_{\nabla j+N}$. Оскільки оператори рівнянь /10/ /12/ однакові, то функції $V_{\nabla i}$ і $V_{\nabla j+N}$ матимуть вигляд

$$V_{\nabla i}(x) = C_{\nabla i} V_0(x) + \tilde{V}_{\nabla i}(x), \qquad /16/$$

$$V_{\nabla j+N}(x) = C_{\nabla j+N} V_0(x) + \tilde{V}_{\nabla j+N}(x), \qquad /17/$$

де $\tilde{V}_{\nabla i}(x)$ і $\tilde{V}_{\nabla j+N}(x)$ – часткові розв"язки неоднорідних диференціальних рівнянь /11/ і /12/, а $C_{\nabla i} V_0(x)$ і $C_{\nabla j+N} V_0(x)$ – загальні розв"язки відповідних однорідних диференціальних рівнянь.

Згідно з /8/, при врахуванні /16/ і /17/ функцію $V(x)$ у першому наближенні по всіх параметрах запишемо у вигляді

$$V_1(x) = C_1 V_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \tilde{V}_{\nabla i}(x) + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_j \tilde{V}_{\nabla j+N}(x), \qquad /18/$$

де $C_1 = 1 + \sum_{i=1}^{N} \bar{C}_{\nabla i} + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{C}_{\nabla j+N}$; $\bar{C}_{\nabla i} = \varepsilon_i C_{\nabla i}$; $\bar{C}_{\nabla j+N} = \delta_j C_{\nabla j+N}$.

У виразі для $V_1(x)$ /18/ залишається довільною постійна C_1. Умову для її визначення запишемо на основі наступних міркувань. Відомо [3], що частота власних поздовжніх коливань для розглядуваної механічної коливної системи без розсіювання енергії у матеріалі визначається формулою

$$\omega^2 = \frac{\int_0^\ell a(x,\tau)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx}{\int_0^\ell b(x,\tau) V^2(x,\tau) dx}. \qquad /19/$$

Тобто задачу про визначення частоти власних коливань можна звести до знаходження мінімуму функціонала /19/. Підставляючи $V_1(x)$ в /19/, отримуємо умову мінімуму

$$\frac{\partial}{\partial C_1}\left\{\int_0^\ell \left[a(x,\tau)\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)^2 - \omega_1^2 b(x,\tau) V_1^2\right] dx\right\} = 0, \qquad /20/$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \omega_{\nabla i} + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_j \omega_{\nabla j+N}, \qquad /21/$$

з якої знаходимо C_1.

Визначивши з /20/ C_1 і приймаючи, що $\bar{C}_{\nabla i} = \bar{C}_{\nabla j+N}$ для будь-яких i та j, маємо

$$C_{\nabla i} = \frac{C_1 - 1}{\varepsilon_i (N+N_1)}; \quad C_{\nabla j+N} = \frac{C_1 - 1}{\delta_i (N+N_1)}. \qquad /22/$$

Отже, частота лінійних власних коливань ω і функція прогину $V(x)$ у першому наближенні знайдені повністю. Аналогічно визначаємо й інші наближення.

Відзначимо, що використання викладеної методики для конкретних задач показало її високу ефективність у випадку, коли коефіцієнти $a(x,\tau)$ і $b(x,\tau)$ незначно змінюються порівняно з a_0 і b_0. У таких задачах уже перше наближення дає хороші результати.

Маючи вирази для ω і $V(x)$, перейдемо до розв"язку задачі з врахуванням розсіювання енергії у матеріалі. Використовуючи метод енергетичного балансу [4] в рівності /6/, беручи до уваги співвідношення

$$\int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,\tau)\frac{\partial U_1}{\partial x}\right] - \omega^2(\tau) b(x,\tau)\frac{\partial U_1}{\partial \varphi^2}\right\} V(x) \begin{Bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{Bmatrix} dx\, d\varphi = 0, \qquad /23/$$

одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$-(\omega(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_1}{\partial\psi}+2a\omega(\tau)B_1=M+P\cos\psi,$$
$$2\omega(\tau)A_1+(\omega(\tau)-\nu(\tau))a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}=N+P\sin\psi-a\frac{d\omega(\tau)}{d(\tau)}, \qquad /24/$$

де
$$M=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\Phi_0 V(x)\cos\varphi\, dx d\varphi;\quad N=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\Phi_0 V(x)\sin\varphi\, dx d\varphi;$$
$$P=\frac{1}{R}\int_0^{\ell}q(x)V(x)dx;\quad R=\int_0^{\ell}b(x,\tau)V^2(x)dx,$$

з якої знаходимо невідомі функції $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$.

Зауважимо, що справедливість співвідношень /23/ і /I3/ можна довести інтегруванням по частинах з використанням конкретних межових умов і рівностей /5/ і /I0/.

Запишемо 2π – періодичний розв"язок системи /24/

$$A_1(\tau,a,\psi)=\frac{1}{2\omega(\tau)}\left(N-a\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right)+\frac{P\sin\psi}{\omega+\nu}, \qquad /25/$$
$$B_1(\tau,a,\psi)=\frac{M}{2a\omega(\tau)}+\frac{P}{a(\omega+\nu)}. \qquad /26/$$

Щоб отримати значення для M і N у /25/ і /26/, потрібно знати явний вираз функціонала $\varepsilon\Phi(u)$. Його можна вибрати, наприклад, згідно з працею [5].

Таким чином, за допомогою формул першого наближення /3/ і /4/ з врахуванням /25/ і /26/ можна дослідити одночастотні режими стаціонарних і нестаціонарних поздовжніх коливань стержня зі змінними параметрами і недосконалою пружністю матеріалу.

Знаходити вищі наближення амплітуди та фази недоцільно, оскільки в праці [6] показано, що для задач такого типу уже перше наближення дає результати, які повністю задовольняють точність інженерних розрахунків.

Список літератури: I. Василенко Н.В. Применение асимптотических методов для исследования колебаний упругих тел с учетом изменения их температуры. – В сб.: Вопросы высокотемпературной прочности в машиностроении. К., Изд-во АН УССР, 1963. 2. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нели-

..йных колебаний. – М.; Наука, 1974. 3. Т и м о ш е н к о С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. 4. П и с а р е н к о Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наукова думка, 1970. 5. П и с а р е н к о Г.С. О новом подходе к описанию контура петли гистерезиса в теории механических колебаний. – Проблемы прочности, 1971, № 6. 6. П и с а р е н к о Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд-во АН УССР, 1955.

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб, Г.Т.Сулим

ВПЛИВ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ВІД ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Розглядаємо плоску стаціонарну задачу теплопровідності без врахування тепловіддачі через бічні поверхні для складного тіла з тонкостінними прошарками на границі розділу матеріалів. На осі абсцис $L = L' \cup L''$ декартової системи координат XOY розташована система V симетричних включень малої товщини $2h(x)$, так що $L' = \bigcup_{n=1}^{N} L_n$, де $L_n = [a_n, b_n]$ і на торцях включень $h(a_n) = h(b_n) = 0$. Вздовж верхньої L'_2 та нижньої L'_1 границь включень здійснюється ідеальний тепловий контакт з півплощинами S_2 та S_1, що мають різні теплофізичні властивості і на L''_2 контактують безпосередньо. Задане джерело тепла потужності q_0 у точці $z_k = x_k + iy_k$ області S_k $(k = 1 \vee 2)$. Коефіцієнти теплопровідності включень, нижньої і верхньої півплощин рівні відповідно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Потрібно визначити температурне поле матриці.

Температуру в області $S_1 \cup S_2$ зобразимо у вигляді $t_0(z) = t_1(z) + t_2(z)$, де $t_1(z)$ – основне температурне поле, що відповідає задачі теплопровідності для двох контактуючих півплощин при відсутності включень

$$t_1(z) = \left(\delta_i^k + 2\delta_i^\ell n_k\right) m_k \ln|z - z_k| + \delta_i^k (n_k - n_\ell) m_k \ln|z - \bar{z}_k| + t_1^0, \qquad /1/$$

де $m_j = \dfrac{q_0}{2\pi\lambda_j}$, $n_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $(z \in S_i;\ i,j = k,\ell;\ k,\ell = 1,2;\ k \neq \ell)$;