...йных колебаний. – М.; Наука, 1974. 3. Т и м о ш е н к о С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. 4. П и с а р е н к о Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наукова думка, 1970. 5. П и с а р е н к о Г.С. О новом подходе к описанию контура петли гистерезиса в теории механических колебаний. – Проблемы прочности, 1971, № 6. 6. П и с а р е н к о Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд-во АН УССР, 1955.

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб, Г.Т.Сулим

# ВПЛИВ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ВІД ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Розглядаємо плоску стаціонарну задачу теплопровідності без врахування тепловіддачі через бічні поверхні для складного тіла з тонкостінними прошарками на границі розділу матеріалів. На осі абсцис $L = L' \cup L''$ декартової системи координат $XOY$ розташована система $N$ симетричних включень малої товщини $2h(x)$, так що $L' = \bigcup_{n=1}^{N} L_n$, де $L_n = [a_n, b_n]$ і на торцях включень $h(a_n) = h(b_n) = 0$. Вздовж верхньої $L_2'$ та нижньої $L_1'$ границь включень здійснюється ідеальний тепловий контакт з півплощинами $S_2$ та $S_1$, що мають різні теплофізичні властивості і на $L_2''$ контактують безпосередньо. Задане джерело тепла потужності $q_0$ у точці $z_k = x_k + iy_k$ області $S_k$ $(k = 1 \vee 2)$. Коефіцієнти теплопровідності включень, нижньої і верхньої півплощин рівні відповідно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Потрібно визначити температурне поле матриці.

Температуру в області $S_1 \cup S_2$ зобразимо у вигляді $t_0(z) = t_1(z) + t_2(z)$, де $t_1(z)$ – основне температурне поле, що відповідає задачі теплопровідності для двох контактуючих півплощин при відсутності включень

$$t_1(z) = (\delta_i^k + 2\delta_i^\ell n_k) m_k \ln|z - z_k| + \delta_i^k (n_k - n_\ell) m_k \ln|z - \bar{z}_k| + t_1^0, \qquad /1/$$

де $m_j = \dfrac{q_0}{2\pi\lambda_j}$, $n_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $(z \in S_i;\ i,j = k,\ell;\ k,\ell = 1,2;\ k \neq \ell)$;

$t_2(z)$ – збурення поля температури в оточуючому середовищі, що викликане наявністю включень; $t_1^0$ – постійна.

Граничні значення функцій при прямуванні аргументу до осі абсцис з верхньої і нижньої півплощин позначатимемо відповідно верхніми індексами плюс і мінус.

Введемо в розгляд функції $\mathcal{F}(z)$ і $\gamma_2(x)$, такі що $t_2(z)=Re\left[\int \mathcal{F}(z)dz\right]$, $\gamma_2(x)=t_2^+(x)-t_2^-(x)$. Перетворюючи умови ідеального теплового контакту включень з матрицею, використовуючи для певних наближень тонкостінність включень і застосовуючи методику розв"язування задачі Рімана-Гільберта, одержуємо сингулярне інтегродиференціальне рівняння типу Прандтля

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{\gamma_2'(t)}{t-x}dt-\alpha(x)\gamma_2(x)=\beta g(x) \qquad (x\in L'),$$

де $g(x)=2m_x J_m\frac{1}{x-z_k}$; $\alpha(x)=\frac{\varkappa}{h(x)}$; $\beta=1-\varkappa$; $\varkappa=\frac{\lambda_0}{2n_1\lambda_1}$. /2/

Коли з рівняння /2/ визначити функцію стрибка $\gamma_2(x)$, то збурення температурного поля у довільній точці матриці встановлюється співвідношенням

$$t_2(z)=Re\left[\frac{n_p}{\pi i}\int_{L'}\frac{\gamma_2(t)}{t-z}dt\right] \qquad (z\in S_2;\ \tau,p=1,2;\ \tau\neq p). \qquad /3/$$

Розв"язок рівняння /2/ повинен задовольняти очевидну умову

$$\int_{a_n}^{b_n}\gamma_2'(t)dt=0 \qquad (n=\overline{1,N}). \qquad /4/$$

Якщо включення теплоізольовані $(\lambda_0=0)$, то $\alpha(x)\equiv 0$ і рівняння /2/ розв"язується у замкнутому вигляді [3].

Якщо включення абсолютно теплопровідні $(\lambda_0=\infty)$, то з /2/ легко одержати $\gamma_2(x)=h(x)g(x)$. Визначаючи скачок $\gamma_1(x)=t_1(x+ih)-t_1(x-ih)$ основного температурного поля $t_1(z)$ на кромках включень, одержуємо, що скачок $\gamma_1(x)+\gamma_2(x)$ температури $t_0(z)$ на абсолютно теплопровідному включенні дорівнює нулю. Це означає, що температура всередині кожного такого включення по товщині не змінюється.

Як частковий випадок можна одержати розв"язок задачі теплопровідності для однорідної площини: досить прийняти у /2/

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ . Тоді $\beta g(x) \equiv 0$ , з рівняння /2/ одержуємо $\gamma_2'(x)=0$ і $t_0(z) = m_K \ln|z-z_K| + t_1^0$.

Попередні підходи [1,4] до розв"язку задач з тонкостінними включеннями-прошарками дали змогу здійснювати точно лише граничний перехід до теплоізольованого включення.

Як приклад розглядається одне включення, розміщене вздовж відрізку $[-a,a]$ дійсної осі, коли $h(x)=h_0[1-(\frac{x}{a})^2]^{1/2q}$, $(q\geq 1)$. При $q=1$ включення має еліптичну форму, при $q=\infty$ – прямокутну.

Розв"язок рівняння /2/ для $L'=[-a,a]$ з умовою $\gamma_2(\pm a)=0$ шукаємо у вигляді ряду з кореневою особливістю

$$\gamma_2'(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \sum_{p=1}^{\infty} A_p T_p\left(\frac{x}{a}\right); \; \gamma_2(x) = -\sqrt{a^2-x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{p} U_{p-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad /5/$$

де $T_p(t), U_{p-1}(t)$ – поліноми Чебишова першого і другого роду.

Застосовуючи процедуру методу ортогональних поліномів для визначення невідомих коефіцієнтів розкладів /5/ маємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь [2]

$$\frac{\pi}{2} A_{K+1} + \alpha_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_p H_{pK}^q = g_K \qquad (K=0,1,2,\ldots),$$

де

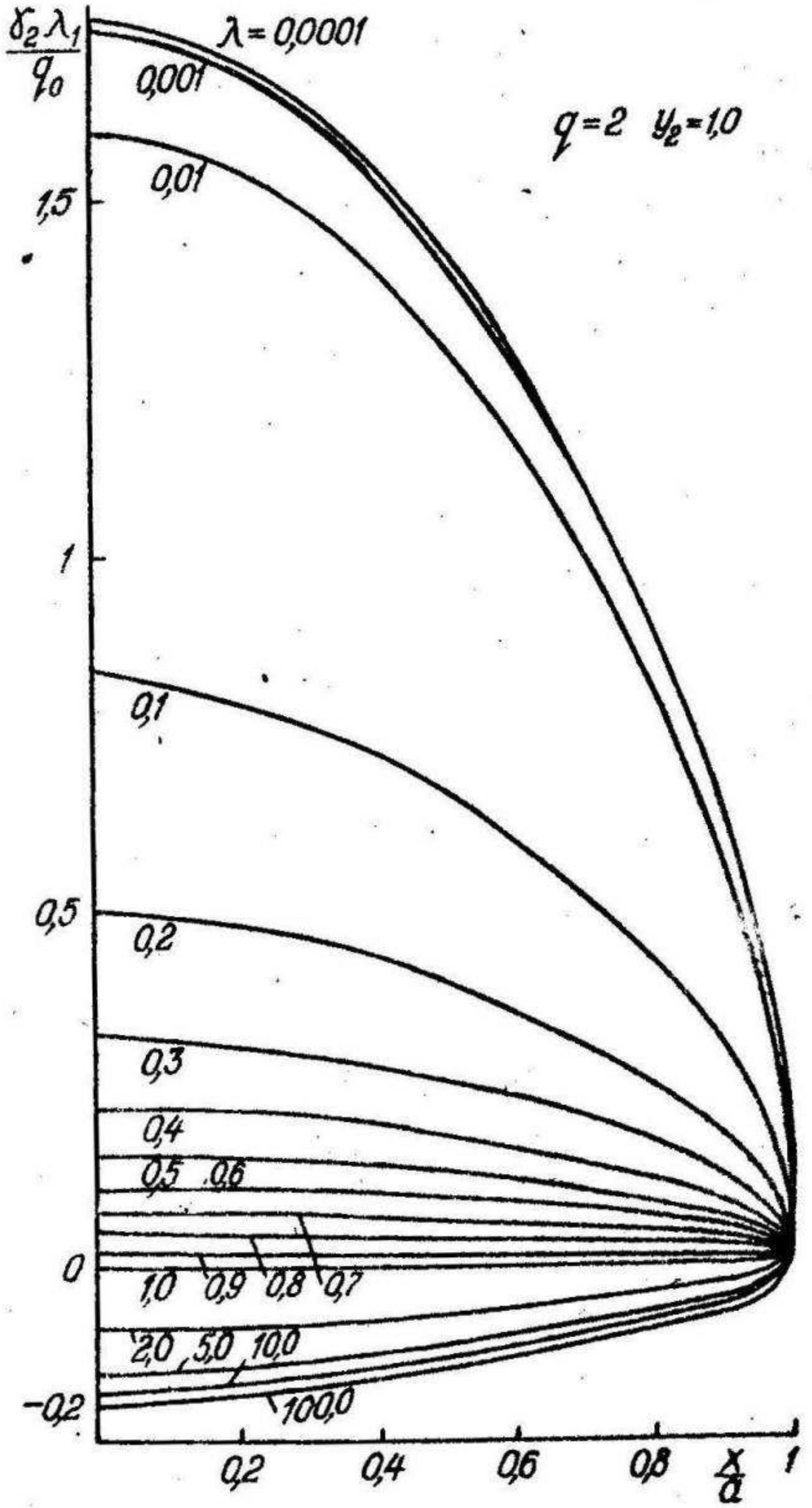
$$H_{pK}^q = \frac{\pi\Gamma(2\nu)}{p4^\nu} \sum_{\ell=1}^{2} \frac{(-1)^{\ell+1}\sin(p_\ell\pi)}{\Gamma(1+\nu+p_\ell)\Gamma(\nu-p_\ell)}; \; g_K = \beta\int_{-1}^{1} g(at)\sqrt{1-t^2}\,U_K(t)\,dt;$$

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa a}{h_0}; \quad \nu = 1-1/2q; \quad 2p_\ell = K-(1)^\ell p; \quad (\ell=1,2).$$

Система рівнянь /6/ квазірегулярна при всіх фізично можливих значеннях параметрів [6] і до її розв"язування можна застосувати метод редукції [5].

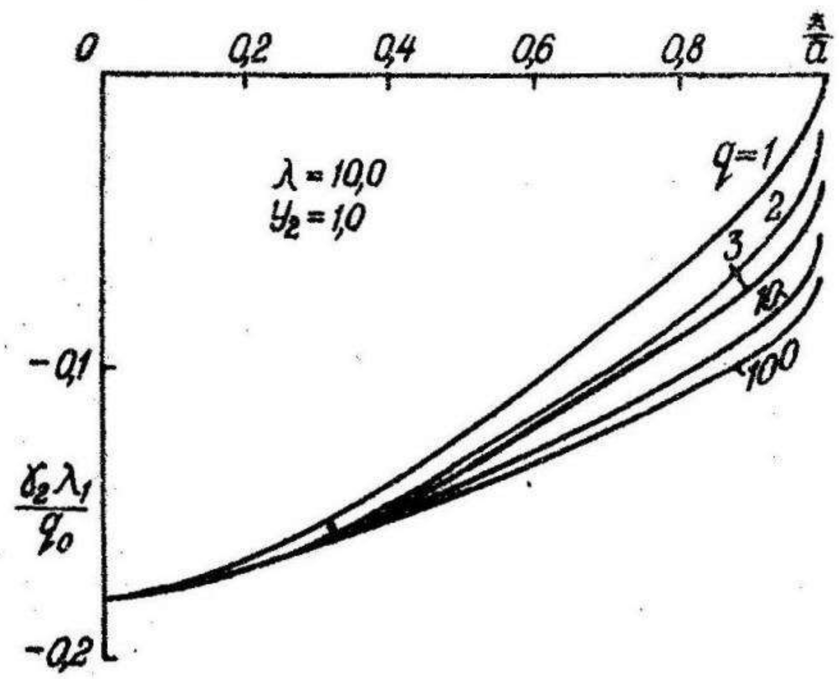
Для включення еліптичної форми $(q=1)$ розв"язок системи /6/ записується явно $A_p = \frac{2p g_{p-1}}{\pi(p+\alpha_0)}$ . Зокрема, коли джерело тепла розташоване у точці $z_K = i y_K$ , то

$$A_{2p-1} = \frac{4\beta m_K}{a}(-1)^{p-1}\frac{2p-1}{2p-1+\alpha_0}\,\mathrm{sign}(y_K)\left[\sqrt{1+\left(\frac{y_K}{a}\right)^2} - \frac{|y_K|}{a}\right]^{2p-1}, \; A_{2p}=0.$$



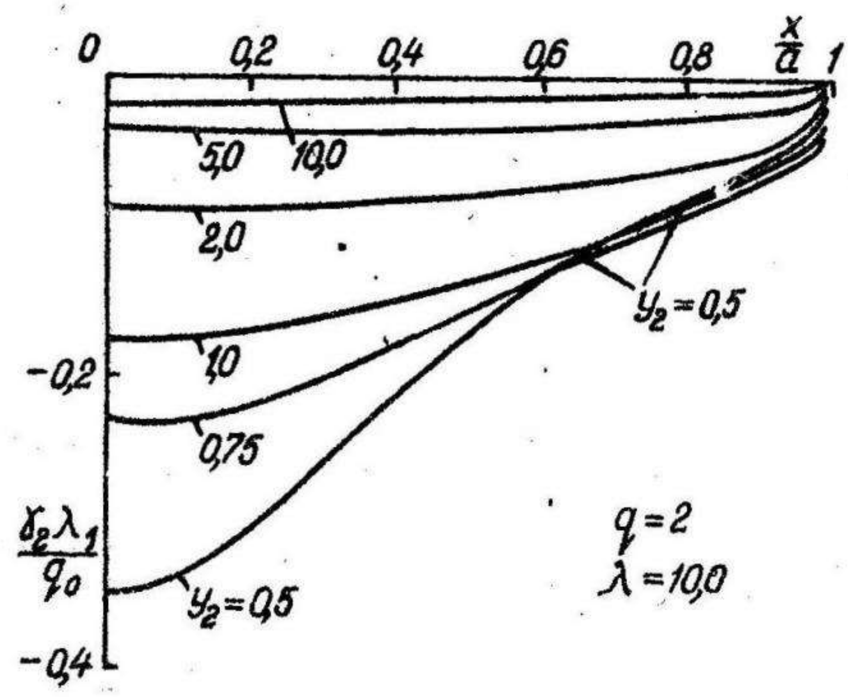
$\frac{\gamma_2 \lambda_1}{q_0}$
$\lambda = 0,0001$
0,001
0,01
$q=2$ $y_2=1,0$
1,5
1
0,1
0,5
0,2
0,3
0,4
0,5 0,6
0
1,0 0,9 0,8 0,7
2,0 5,0 10,0
-0,2
100,0
0,2 0,4 0,6 0,8 $\frac{x}{a}$ 1


Рис. I.



0
0,2
0,4
0,6
0,8
x/a
λ = 10,0
y₂ = 1,0
q=1
2
3
10
100
-0,1
-0,2


Рис. 2.



0
0,2
0,4
0,6
0,8
x/a
1
5,0
10,0
2,0
y₂=0,5
1,0
0,75
y₂=0,5
q=2
λ=10,0
-0,2
-0,4


Рис. 3.

На ЕОМ ЕС-1022 проведені розрахунки стрибка $\gamma_2(x)$ збуреного поля на включенні в однорідній площині $(\lambda_1=\lambda_2)$ при $a/h_0=10$ і різних значеннях параметрів $q$, $\lambda=\lambda_0/\lambda_1$, $z_k=iy_k$. У цьому випадку $A_{2p}=0$ і для досягнення точності 1% при $|x|\leq 0{,}95a$ у найнесприятливішому випадку прямокутного $(q=\infty)$ абсолютно теплопровідного $(\lambda_0=\infty)$ включення при $|y_k|\leq 0{,}5a$ досить обмежитися першими 25 відмінними від нуля коефіцієнтами розкладу /5/. Розв"язки $\gamma_2(x)$, одержані при $\lambda$ = 0,0001 і $\lambda$ = 10000, відрізняються від відповідних аналітичних розв"язків при $\lambda=0$ і $\lambda=\infty$ менше, ніж на 1%. При довільних значеннях параметрів виконується нерівність

$$m_k\,\mathrm{sign}(y_k)(\lambda_0-\lambda_1)\gamma_2(x)\geq 0.$$

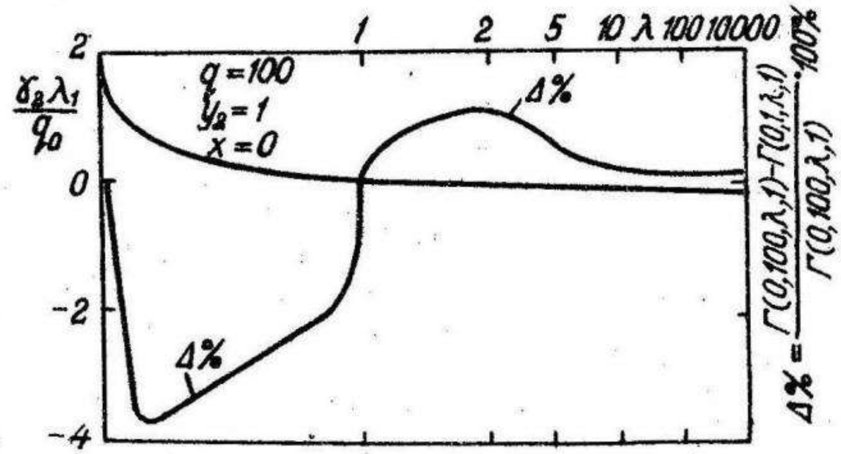



Рис. 4.

Слід зауважити, що скачок $\gamma_2(x)$ не зміниться, якщо стік тепла у точці $z_k$ замінити на джерело тепла тієї ж потужності у точці $\bar{z}_k$.

Якщо позначити через $\Gamma(x,q,\lambda,y_k)$ значення $\gamma_2(x)$, знайдене для деяких конкретних значень параметрів $x, q, \lambda, y_k$, то має місце нерівність $|\Gamma(x',q',\lambda',y_k')|\geq|\Gamma(x'',q'',\lambda'',y_k'')|$

при $|x'| \leq |x''| \leq a$ /рис. I-3/

$q' \geq q'' \geq 1$ /рис.2/

$\lambda' \geq \lambda'' > 1$

або $0 \leq \lambda' \leq \lambda'' \leq 1$ /рис. I,4/

$h_0 < |y_k'| \leq |y_k''|$ /рис.3,5/

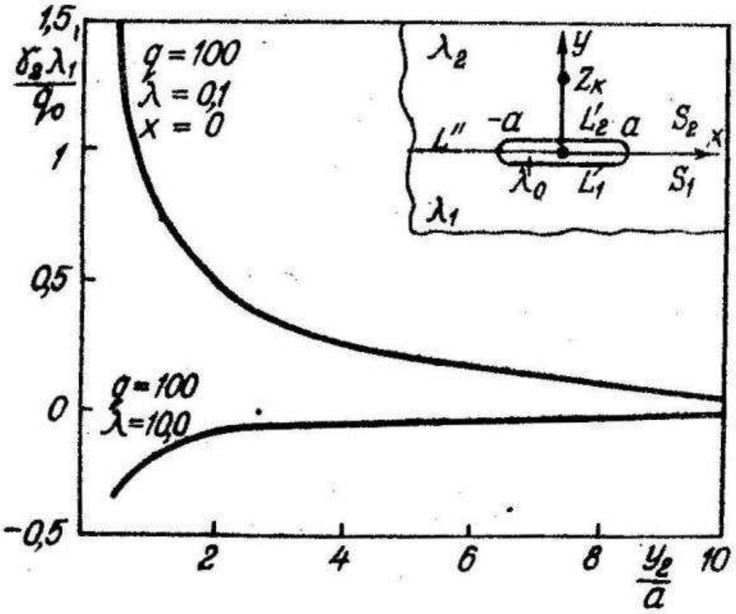



Рис. 5.

Розрахунки показали, що при $|y_K| \leqslant 0{,}75a$ починає проявлятися локальність нагріву включення /рис.3/.

Скачок температури по центру включення $\gamma_2(0)$ при варіюванні форми включення від еліптичної до прямокутної змінюється не більше, ніж на 3,75%. Ця різниця максимальна при $\lambda$ = 0,2 і прямує до нуля, коли $\lambda \to 0$ і $\lambda \to \infty$ /рис.4/. Чим менше значення $\lambda$, тим менше впливає форма включення на скачок температури, і для теплоізольованого /теплонепроникного/ включення скачок температури не залежить від форми.


Список літератури: I. А б д у р а х м а н о в И.М., А л и б е к о в Б.Г. О влиянии периодической системы тонких включений на плоское стационарное температурное поле. - Инженерно-физический журнал, 1977, т.32, № 3. 2. М о р а р ь Г.А., П о п о в Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. -

Прикладная математика и механика, 1970, т.34, № 3. 3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: 1968. 4. Побережный О.В., Кит Г.С. Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними. – Инженерно-физический журнал, 1968, т.15, № 4. 5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. 6. Сулим Г.Т. Регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. – Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат., 1975, вип.10.