

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

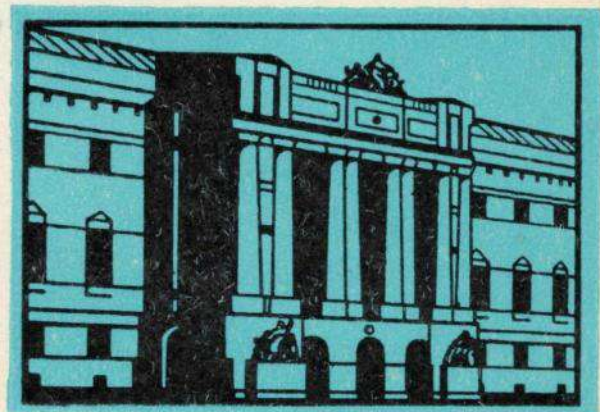
ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

16

1980



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК 16

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВІЩА ШКОЛА»
1980

ББК 22.16

517.2

Л 89

УДК 518

Теоретические и прикладные вопросы математического анализа,
вып. 16. Вести. Львов. ун-та, - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов
ун-те, 1980, с. 96 /на украинском языке/.

В вестнике помещены статьи по численным методам решения диф-
ференциальных уравнений и задач оптимизации, по решению статических
и динамических задач для сплошных сред.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспиран-
тов и студентов старших курсов.

Списки лит. в конце статей.

Р е д а к ц і й н а к о л е г і я : проф., д-р техн. наук Д. В. Гри-
ліцький /відп. ред./; доц., канд. фіз.-мат. наук Ю. М. Щербина /відп.
секретар/; доц., канд. фіз.-мат. наук М. Я. Бартіш; доц., канд.
фіз.-мат. наук А. І. Кардаш; проф., д-р техн. наук Н. П. Флейшман.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

20204-001 I702050000
M225/04/-80

© Львівський державний
університет, 1980

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИЗАЦІЇ
ТЕОРЕТИЧНОГО ЗНАННЯ

У сучасній науці математика застосовується на різних рівнях і ступенях пізнання, виконуючи при цьому різноманітні функції у пізнанні /вона виступає ефективним засобом збереження та переробки інформації, методом планування експерименту і вибору найбільш оптимальних шляхів експериментального дослідження, засобом моделювання явищ, які неможливо уявити наочно, засобом передбачення ще невідомих науці явищ і процесів тощо/.

Характерною особливістю сучасного етапу математизації науки, зокрема природознавства, є значне зростання інтегративної та евристичної ролі математичних абстракцій в науковому пізнанні, їх активна участь у формуванні та розвитку понятійного апарату інших наук. Якщо, скажімо, раніше роль математики в таких науках як, наприклад, хімія, біологія, гуманітарні галузі знання, зводилась головним чином до статистичної обробки інформації, яку діставали нематематичним шляхом, то тепер вона використовується як засіб одержання принципово нових знань, засіб побудови моделей, теорій досліджуваних явищ і процесів.

Про глибокий внутрішній зв'язок механіки і математики свідчить, зокрема, створення Ейлером, Лагранжем, Лапласом, Гамільтоном та іншими видатними вченими аналітичної механіки. Лагранж характеризував розвинуті ним методи як такі, що не вимагають ні побудов, ні геометричних або механічних міркувань, а потребують тільки алгебраїчних операцій.

Аналітична механіка виникла внаслідок перебудови механіки Ньютона новим математичним апаратом — апаратом диференціальних рівнянь. На відміну від ньютонівської аналітична механіка опирається на більш загальний апарат диференціальних рівнянь. Вона використо-

був, зокрема, диференціальні рівняння, що містять не тільки похідні від шляху по часу, але і похідні від енергії по часових і просторових координатах.

Значне проникнення математики у механіку зумовлене перш за все однорідністю об'єкта механіки, тим, що вона вивчає механічний рух, притаманний різним за якістю предметам і явищам об'єктивної дійсності. В.І.Ленін вважав наближення науки до однорідних і простих елементів матерії, закони руху яких допускають математичну обробку, великим успіхом природознавства. Якщо, з одного боку, розвиток механіки немислимий без математики, її засобів і методів, то, з другого боку, потреби механіки викликали до життя не тільки окремі математичні теорії, але й нові напрямки в математиці. Досить нагадати, що саме потреби механіки привели Ньютон до створення основ математичного аналізу. На мові доньютонівської математики, що використовувала тільки постійні величини, сформулювати основні закони механіки було просто неможливо. У наш час, наприклад, потреби дальшого прогресу гідродинаміки, аеродинаміки зумовили розвиток нових напрямків у теорії функцій комплексної змінної, теорії наближень у комплексній області, теорії несамоспряжених операторів. Створення нового розділу математики - теорії сингулярних інтегральних рівнянь - нерозривно зв'язане з проблемами теорії пружності і т.ін.

У класичній фізиці, що розвинулась як безпосереднє узагальнення повсякденного досвіду, типовим був такий шлях розвитку фізичних понять, коли фізик переходив від експериментальних даних до математичних абстракцій, "зв'язуючи" їх між собою за певними правилами. У сучасній фізиці фізик від математичних абстракцій у рівняннях теорії переходить до показань експериментальних засобів. Математика в сучасному фізичному пізнанні - це не просто інструмент, за допомогою якого можна описати будь-яке явище природи, але і головне джерело уявлень і принципів, на основі яких зароджуються нові теорії. Сучасна теоретична фізика користується переважно методом математичної гіпотези; великі відкриття у мікрофізиці, теорії гравітації, фізиці

твердого тіла були, наприклад, одержані на "кінчику математичного пера". При застосуванні методу математичної гіпотези активне начало належить математиці /широке застосування методу математичної гіпотези в науковому пізнанні – один із яскравих проявів зростання теоретичної активності пізнаючого суб'єкта в ході освоєння ним об'єктивної реальності/. "Я переконаний, – писав А.Ейнштейн, – що чисто математична побудова дозволить знайти ті поняття і закономірні зв'язки між ними, які дають ключ до розуміння явищ... Експеримент залишається, природно, єдиним критерієм придатності деякої математичної побудови для фізики. Але власне творче начало відноситься до математики" /підкресл. нами – В.С., [6, с.204]/.

Вже на початковій стадії розвитку кібернетика широко використовувала математичну логіку, теорію ймовірностей, математичну статистику, теорію функцій дійсної змінної, теорію множин, функціональний аналіз, топологію та інші теорії і методи математики. Будучи однією з найбільш математизованих наук, кібернетика активно впливає на розвиток математичного знання, зокрема дискретної математики, на стиль сучасного математичного мислення. Більше того, понятійно-категоріальний апарат кібернетики має важливе значення для процесу теоретизації і математизації біології та гуманітарних наук.

Зростання ролі математики в сучасному теоретичному пізнанні зумовлене цілим комплексом тісно взаємопов'язаних між собою факторів, одним з яких виступає розвиток самої математики, розширення її предмету зростання абстрактного характеру її понять, теорій, методів і т.ін. Відомі такі періоди в розвитку математики: період зародження математики, період елементарної математики, період математики змінних величин, період сучасної математики. Перший період характеризується головним чином нагромадженням фактичного матеріалу в рамках єдиної нерозчленованої науки, формуванням уявлень про число та фігуру, зачатками арифметики та геометрії. Вже на початку другого періоду математика з науки напівемпіричної перетворюється

в науку дедуктивну: оформляються як самостійні наукові дисципліни арифметика, алгебра, геометрія, тригонометрія. Період елементарної математики характеризується в основному успіхами у вивченні постійних величин.

Новий період у розвитку математики починається з часу, коли вона переходить від вивчення постійних величин до дослідження залежностей між змінними величинами /період математики змінних величин/. Як зазначав Ф.Енгельс, введення Декартом ідеї змінної величини було поворотним пунктом у математиці, бо завдяки цьому у математику проникли рух і діалектика. Почали бурхливо розвиватись теорія диференціальних рівнянь, варіаційне числення, проєктивна геометрія, теорія ймовірностей, диференціальна геометрія і т.ін. Ідеї і методи математики змінних величин зробили революційний вплив на розвиток математики постійних величин.

Говорячи про сучасну математику, необхідно підкреслити, що різні автори вкладають у це поняття неоднаковий зміст. Наявність у літературі різних точок зору на характер сучасної математики, її зв'язок з математикою минулих історичних епох вказує передусім на складність, багатогранність такого феномена, як сучасна математика. Ми дотримуємось періодизації історії математики, даної академіком А.М.Колмогоровим, згідно з якою період сучасної математики починається прибізно з середини ХІХ ст. і характеризується суттєвим розширенням предмета математики, виділенням в окремий розділ проблем обґрунтування математики, розвитком принципіально нових ідей, небаченим раніше розширенням сфери застосування математики та її методів тощо.

Сучасна математика розвивається надзвичайно швидко, вона переживає епоху грандіозних революційних змін. Створення і розвиток ЕОМ, бурхливий розвиток дискретної математики, перебудова багатьох розділів математики на алгебро-топологічній основі, зростання абстрактного характеру понять і теорій математики, значне розширення сфери її застосування, суттєві зміни, що відбулися у взаємовідносинах між

теоретичною і прикладною математиною, — ось деякі характерні риси розвитку сучасної математичної науки. Сьогодні, наприклад, майже неможливо визначити, де закінчується теоретична і починається прикладна математика, і навпаки. Як відомо, неевклідова геометрія набула важливого значення у теоретичній фізиці, зокрема в теорії відносності; теорія груп, створена для вивчення питання про можливість розв'язання алгебраїчних рівнянь у радикалах, стала незамінною у фізиці та хімії; а теорія множин, що виникла спочатку для обґрунтування числення нескінченно малих, широко застосовується в біології та лінгвістиці. Можна погодитись з В.Успенським, що тепер, як ніколи, стає ясним, що математика — це не тільки сукупність фактів, викладених у вигляді теорем, але передусім — арсенал методів і мова для опису фактів і методів різних галузей науки і практичної діяльності.

З розвитком математичної науки весь час зростає абстрактний характер її понять, теорій. Якщо спочатку у зв'язку з виникненням арифметики та геометрії математика абстрагувалась від конкретної, якісної природи об'єктів, то вже з введенням буквенної символіки і виникненням алгебри вона абстрагується від конкретного кількісного змісту чисел і величин. А сучасна математика абстрагується не тільки від конкретної природи об'єктів, але і від конкретних залежностей між ними.

Сила математики — в силі наукової абстракції. Сучасна математика оперує надзвичайно абстрактними поняттями, у ній переважають абстракції від абстракцій, вона широко використовує символічну мову й алгоритмічні процеси, все більше число математичних теорій будується аксіоматично.

Зростання абстрактності математики аж ніяк не означає послаблення її зв'язку з реальним світом. Навпаки, за допомогою абстрактних понять і теорій математики вдається відобразити більш суттєві сторони реальності.

Математичне знання, яке стає все більш абстрактним з точки зору своєї форми, знаходиться ближче до об'єктивної дійсності,

її закономірностей і в цьому розумінні конкретніше за своїм змістом.

У сучасному математичному пізнанні зростає значення механізму мислення від конкретного до абстрактного, евристична роль якого була глибоко розкрита В.І.Леніним.

Розвиток математики на сучасному етапі переконливо свідчить, що старий погляд на математику як науку про числа і величини не можна вважати правильним. Математика тепер вивчає більш широкий клас об'єктів, ніж це могла робити класична математика, що незрівнянно посилює її пізнавальні можливості в інших науках.

Аналіз процесу математизації дає підставу зробити висновок, що кількісні відношення та просторові форми реального світу, на вивчення яких робить акцент математика, мають свою специфіку в різних формах руху матерії, у різних об'єктах. Про це свідчить хоч би той факт, що до тих чи інших об'єктів застосовуються лише ті математичні методи, що відповідають природі цих об'єктів. Наприклад, математичний аналіз виявився недостатнім для сфери квантових явищ, більш адекватним засобом їх вивчення є апарат функціонального аналізу і т.ін. У наш час виникла настійна потреба в розробці "біологічної", "психологічної" математики, тобто математичних методів і засобів для адекватного опису складних явищ і процесів живої природи та соціальної дійсності.

Математизація наук – складний діалектичний процес взаємодії математики та інших галузей знання. Для ефективного застосування математики, її засобів і методів у науковому пізнанні необхідні передумови не тільки в математиці, але й в математизуючій науці. Спроби застосувати математику в тій чи іншій галузі наукового знання нерідко виявляють неповноту емпіричного матеріалу в цій науці, що потребує нагромадження нових емпіричних даних, часто доводиться уточнювати існуючі поняття і концепції, вводити нові таким чином, щоб можна було ефективно застосовувати математичні засоби. При математичному моделюванні явищ і процесів, що вивчаються в інших науках, необхідно

абстрагування від різноманітності притаманних їм властивостей і відношень, вводити у відповідну теорію ряд ідеалізацій і т.ін.

У цьому зв'язку важливо підкреслити, що чим відносно простіші досліджувані явища та процеси, тим легше і швидше піддаються вони математичній обробці. І, навпаки, чим складніші досліджувані об'єкти, тим менш однорідні їх елементи, тим більш якісно вони диференційовані, а тому застосування математики у відповідних науках утруднено. Історія розвитку науки свідчить, про те, що застосування математики у природознавстві почалось значно раніше, ніж у гуманітарних науках, причому і всередині природознавства послідовність проникнення математичних методів у різні галузі наукового знання визначалась у кінцевому підсумку природою досліджуваних ними явищ і процесів.

У методологічному плані труднощі математизації знання полягають у тому, що нелегко "перекинути місток" від абстрактних об'єктів математики /у математиці безпосередньому вивченню піддаються такі абстрактні об'єкти як числа, функції, математичні структури і т.ін./ до об'єктів, що їх вивчають природничі та гуманітарні науки.

Можна сказати, що там, де перестає діяти принцип простоти, де об'єкти не допускають навіть відносного спрощення, стандартизації та уніфікації, там математичні засоби стають неефективними.

Застосування математики в інших науках, зокрема в науках про живу природу і суспільство, веде до більш глибокого пізнання досліджуваних об'єктів лише за умови їх використання на основі діалектико-матеріалістичного світогляду і методології, врахування якісних особливостей досліджуваних явищ і процесів.

Сучасна буржуазна філософія особливо спекулює на досягненнях і труднощах розвитку сучасного математичного пізнання, на прогресивному процесі математизації науки, заявляючи, що "твердження логіки та математики не говорять нам нічого про світ", що "відмінність між якісним і кількісним є не відмінністю у природі, а відмінністю в нашій концептуальній системі..." [3, с.49, 106]. Будучи неспроможни-

ми науково пояснити причини ефективності математики в природничих науках, буржуазні філософи заявляють, що неймовірна ефективність математики у природничих науках є дещо, що межує з містикою, бо ніякого раціонального пояснення цьому факту немає [2, с.23].

Діалектико-матеріалістичний підхід до аналізу процесу математизації науки має неocenенне значення для правильного розуміння закономірностей сучасної науково-технічної революції, для критики платоністських, неопозитивістських та інших ідеалістичних інтерпретацій процесу математизації і математичного знання.

Список літератури: 1. Л е н і н В.І. Повне зібрання творів. 2. В и г н е р Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. - В кн.: Проблемы современной математики. М., 1971. 3. К а р н а п Р. Философские основания физики. Введение в философские науки. - М., 1971. 4. С о й е р М. Путь в современную математику. - М., 1972. 5. Ш и х а н о в и ч Ю.А. Введение в современную математику. - М., 1965. 6. Э й н ш т е й н А. Собрание научных трудов, т. IV. - М., 1967.

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, Ю.В.Нікольський

ГРАДИЕНТНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу мінімізації визначеної на множині $\Omega = \{x: f(x) \leq f(x_0)\}$ двічі неперервно диференційованої та достатньо гладкої на цій множині функції $f(x)$, ℓ змінних.

Одним з найбільш поширених методів чисельного розв'язання цієї задачі є метод найшвидшого спуску. Він має лінійну швидкість збіжності, яка низька при мінімізації функцій з погано зумовленою матрицею других похідних.

Ми пропонуємо метод, який має швидкість збіжності вищу, ніж метод найшвидшого спуску, причому прискорення досягається шляхом вибору параметра θ .

Розглянемо метод

$$\bar{x}_n = x_n - \beta_n \nabla f(x_n),$$

$$s_n = \theta \frac{\nabla f(x_n)}{\|\nabla f(x_n)\|} + (1-\theta) \frac{\nabla f(\bar{x}_n)}{\|\nabla f(\bar{x}_n)\|}, \quad 0 < \theta \leq 1, \quad /1/$$

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n s_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де α_n, β_n - скалярні множники, а β_n вибирається з умови

$$f(x_n - \beta_n \nabla f(x_n)) = \min_{\beta} f(x_n - \beta \nabla f(x_n)). \quad /2/$$

Неважко помітити, що при $\theta = 1$, метод /1/ перетворюється в метод найшвидшого спуску.

Нехай функція $f(x)$ - сильно випукла і має обмежений спектр гессіана, тобто виконуються умови

$$m \|y\|^2 \leq (\nabla^2 f(x) y, y) \leq M \|y\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad /3/$$

Крім того, з /2/ випливає $(\nabla f(x_n), \nabla f(\bar{x}_n)) = 0$. /4/

Враховуючи /3/, /4/, можна довести, як і в праці [1] збіжність послідовностей $\{x_n\}$ та $\{f(x_n)\}$ відповідно до x_* та $f(x_*)$ для довільного початкового наближення x_0 , де x_* - точка мінімуму.

Розглянемо оператор P_n , який здійснює ортогональне проектування на напрямок, визначений вектором $\nabla f(\bar{x}_n)$. Матриця оператора P_n має вигляд

$$P_n = D_n^* (D_n D_n^*)^{-1} D_n, \quad /5/$$

де D_n - матриця, що складається з одного стовпця - компонент вектора $\frac{\nabla f(\bar{x}_n)}{\|\nabla f(\bar{x}_n)\|}$. Слід зазначити, що власні числа матриці

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_e = 0 \quad [2].$$

З врахуванням того, що $(x_n - x_{n-1}, \nabla f(\bar{x}_n)) > 0$, та використавши оператор /5/, вираз для s_n набуває вигляду

$$s_n = \theta \frac{\nabla f(x_n)}{\|\nabla f(x_n)\|} + (1-\theta) \frac{P_n(x_n - x_{n-1})}{\|P_n(x_n - x_{n-1})\|}.$$

Тепер метод /1/ можна розглянути як модифікацію k - крокового градієнтного методу [3]. Використовуючи позначення праці [3],

записуємо

$$\alpha_0 = 1,$$

$$T_2 = \alpha_n G_2, \quad G_2 = (1 - \theta) N A_n,$$

$$T_1 = \alpha_n G_1, \quad G_1 = G_2 + \frac{\partial \nabla^2 f(x_*)}{\|\nabla f(x_n)\|},$$

$$\text{де } N = \|P_n(x_n - x_{n-1})\|.$$

Метод /I/ в достатньо малому околі розв'язку набуває такого вигляду:

$$y_{n+1} = \tilde{T}_1 y_n + \tilde{T}_2 y_{n-1},$$

де $\tilde{T}_1 = E + T_1; \quad \tilde{T}_2 = T_2; \quad y_n = x_n - x_*;$

E - одинична матриця та враховано, що

$$\nabla f(x_n) - \nabla f(x_*) = \nabla^2 f(x_*)(x_n - x_*) + O(\|x_n - x_*\|^2).$$

Оскільки матриці операторів $G_1, G_2, \nabla^2 f(x)$ симетричні, для них правильні леми 1 та 2, тобто виконуються умови теореми 7 із праці [3]. Тоді при виконанні умови

$$\sup \max(|\rho_1|, |\rho_2|) \leq q < 1, \quad /6/$$

$$A \in \mathcal{O}(G_1)$$

$$B \in \mathcal{O}(G_2),$$

де ρ_1, ρ_2 - корені рівняння

$$\rho = (1 - \alpha_n A)\rho + \alpha_n B,$$

існує така оцінка швидкості збіжності:

$$\|y_{n+1}\| \leq C(\varepsilon) (\|y_0\|^2 + \|y_1\|^2)^{1/2} (q + \varepsilon)^n.$$

Неважко переконатись, що співвідношення /6/ виконується завжди, якщо α_n вибране з умови $0 < \alpha_n < A$.

Цікавим вважаємо і такий результат: при виконанні методу /I/ маємо змогу отримати значення q , менше, ніж параметр δ - знаменник геометричної прогресії в оцінці швидкості збіжності методу найшорішого спуску. У цьому випадку α_n вибирається з проміжку $(0, \frac{\delta(1-\delta)}{\delta A - B})$, причому досягти виконання цієї умови можна за рахунок підбору такого θ , при якому виконується умова

$$\delta^2 < BA^{-1} < \delta,$$

де

$$B = (1-\theta)N;$$

$$A = B + \theta \frac{M}{\| \nabla f(x_n) \|}$$

Якщо $x_n \rightarrow x_*$, то $\alpha_n \rightarrow 0$.

Як відомо, $\delta_{\min} = \frac{M-m}{M+m}$, тому застосування методу /I/ доцільне при $M \gg m$.

У таблиці наведені результати застосування методу /I/ до відшукування екстремума таких функцій:

$$1. f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 90(x_3 - x_4)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 + 10.8(x_2 - 1)(x_3 - 1) \quad x_0 = (-1, -1, -1, -1).$$

$$2. f(x) = 100(x_1 - x_2)^2 + (1 - x_2)^2 \quad x_0 = (0.5, -0.5).$$

$$3. f(x) = 100(x_1 - x_2)^2 + (1 - x_2)^2 \quad x_0 = (0.5, -0.5).$$

Функція	θ	Точність		Кількість ітерацій	Кількість обчисл. град.
		за аргументом	за функцією		
1	0,55	10^{-6}	0,6 10^{-8}	716	1432
	0,6	10^{-6}	0,35 10^{-8}	1145	2290
	1	10^{-3}	0,3 10^{-4}	3001	3001
2	0,55	10^{-4}	0,9 10^{-7}	336	672
	0,6	10^{-4}	0,9 10^{-7}	239	478
	1	10^{-4}	0,7 10^{-7}	1800	1800
3	0,55	10^{-4}	0,8 10^{-7}	889	1778
	0,7	10^{-4}	0,8 10^{-8}	1360	2770
	0,85	10^{-4}	0,16 10^{-7}	881	1762
	1	10^{-3}	10^{-5}	13171	13171

Параметр θ залишався постійним на всіх ітераціях.

Список літератури: 1. Пшеничний В.Н., Данилин Ю.М. Численні методи в екстремальних задачах. - М.: Наука, 1975. 2. Гантмахер Е. Теорія матриць. - М.: Наука, 1967. 3. Поляк Б.Т. О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов. - ЖВММФ, 1964, т.4, № 5.

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко, Й. Г. Шипка

ПРО МЕТОД ШВАРЦА ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Наводимо застосування методу Шварца для побудови бігармонічних функцій із заданими особливостями у просторових областях. Такі задачі мають прикладне значення, оскільки вони зв'язані з врахуванням факторів типу зосередженої сили, зосередженого моменту, лінійної дислокації, центрів розширення /дилатації/, джерел, стоків і т.ін.

І. Нехай D - область у R_3 , обмежена поверхнею Σ класу S_2 . Потрібно знайти в D функцію $u(x)$, яка бігармонічна скрізь у D за винятком точки y , в околі якої вона зображується у вигляді

$$u(x) = v(x) + \omega(x, y),$$

де

$$\omega(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \bar{D}^\alpha \tau; \quad \tau = |x - y|;$$

$$\bar{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}; \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

A_α - постійні числа; $v(x)$ - регулярна бігармонічна у D функція.

Крім того, $u(x)$ повинна на Σ задовольняти крайові умови

$$B^i u|_\Sigma = f_i(x),$$

$$B^i = \begin{cases} I & i=1 \\ \frac{\partial}{\partial n} & i=2, \end{cases}$$

де $f_i \in A_{\ell-i}, \ell=2$.

Позначимо через K_1 та K_2 дві кулі, обмежені сферами Γ_1 та Γ_2 радіусів ε_1 та ε_2 з центром в точці y і такі, що цілком лежать у D : $K_1 \subset K_2 \subset D$. Нехай $\Omega_1 = D \setminus K_1$, $\Omega_2 = D \setminus K_2$, $\partial\Omega_1 = \Sigma \cup \Gamma_1$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma_2$ ($\partial\Omega_i$ означає межу Ω_i , $i=1, 2$).

Тоді $D = K_2 \cup \Omega_1$, $K = K_2 \cap \Omega_1 = K_2 \cap K_1$, $1/K$ - кульовий шар з межею $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Розглядувана задача зводиться до побудови регулярної бігармонічної функції $v(x) = u(x) - \omega(x, y)$ в області D . Зауважимо, що $\omega(x, y)$ - регулярна бігармонічна функція в K і Ω_2 . Задачу розв'язуємо за допомогою методу Шварца, для цього введемо дві послідовності $u_k - \omega$ і v_k за такою схемою:

v_0 бігармонічна в D і задовольняє на її межі Σ умови

$$B'v_0|_{\Sigma} = f_i - B'\omega;$$

u_0 - бігармонічна в Ω_2 і задовольняє на $\partial\Omega_2$ наступні крайові умови

$$B'u_0|_{\Sigma} = f_i;$$

$$B'u_0|_{\Gamma_2} = B'\omega|_{\Gamma_2};$$

v_k ($k \geq 1$) - кусково-бігармонічні в $D = K_1 \cup \Omega_1$ і задовольняють наступні умови на Σ і Γ_1 :

$$B'v_k|_{\Sigma} = f_i - B'\omega|_{\Sigma},$$

$$B'v_k|_{\Gamma_1} = B'(u_k - \omega)|_{\Gamma_1};$$

$u_k - \omega$ ($k \geq 1$) - кусково-бігармонічні в $K_2 \cup \Omega_2$ і задовольняють на Σ і Γ_2 умови:

$$B'u_k|_{\Sigma} = f_i \quad (B'(u_k - \omega)|_{\Sigma} = f_i - B'\omega|_{\Sigma}),$$

$$B'(u_k - \omega)|_{\Gamma_2} = B'v_{k-1}|_{\Gamma_2}.$$

2. Для доведення збіжності процесу введемо функціонал енергії, відповідний розглядуваній крайовій задачі

$$J(u) = \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau,$$

який досягає мінімуму в D на розв'язках цієї задачі серед усіх функцій, які набувають на Σ ті ж значення, що і згадуваний розв'язок.

Покажемо, що на елементах побудованої вище послідовності значення функціоналу утворюють спадну послідовність додатних чисел:

$$J[v_k] \leq J[u_k - \omega] \leq J[v_{k-1}] < \dots$$

Насправді, порівняємо значення $J(u)$ на функціях V_{k-1} та $u_k - \omega$ в області D .

Оскільки $u_k - \omega$ бігармонічна в Ω_2 , а на її межі $\partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup \Sigma$

$$B_{\Gamma_2}^i [u_k - \omega] = B_{\Gamma_2}^i (v_{k-1}),$$

$$B_{\Sigma}^i (u_k - \omega) = f_i - B_{\Sigma}^i \omega = B_{\Sigma}^i v_{k-1},$$

то $u_k - \omega = v_{k-1}$ в Ω_2 (з огляду на єдиність розв'язку першої крайової задачі для бігармонічного рівняння. Тому

$$\begin{aligned} J(v_{k-1}) &= \iiint_D \sum_{|d|=2} \frac{2}{d!} \left(\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x_1^{d_1} \partial x_2^{d_2} \partial x_3^{d_3}} \right)^2 d\tau = \\ &= \iiint_{K_2} \sum_{|d|=2} \frac{2}{d!} \left(\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x_1^{d_1} \partial x_2^{d_2} \partial x_3^{d_3}} \right)^2 d\tau + \iiint_{\Omega_2} \sum_{|d|=2} \frac{2}{d!} \left(\frac{\partial^2 (u_k - \omega)}{\partial x_1^{d_1} \partial x_2^{d_2} \partial x_3^{d_3}} \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки $u_k - \omega$ бігармонічна в області K_2 , то

$$\iiint_{K_2} \sum_{|d|=2} \frac{2}{d!} \left(\frac{\partial^2 (u_k - \omega)}{\partial x_1^{d_1} \partial x_2^{d_2} \partial x_3^{d_3}} \right)^2 d\tau \leq \iiint_{K_2} \sum_{|d|=2} \frac{2}{d!} \left(\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x_1^{d_1} \partial x_2^{d_2} \partial x_3^{d_3}} \right)^2 d\tau.$$

Отже, з попередньої рівності маємо

$$J(v_{k-1}) \geq J(u_k - \omega).$$

Таким чином,

$$J(u_k - \omega) \leq J(v_{k-1}).$$

Зовсім аналогічно доводиться нерівність

$$J(v_{k-1}) \leq J(u_{k-1} - \omega).$$

3. Розглянемо множину функцій

$$\varphi(\alpha) = J[\alpha V_k + (1-\alpha)(u_k - \omega)].$$

Тому що $J(V_k)$ найменше значення функціоналу J в області

$D = K_1 \cup \Omega_1$ серед функцій з тими ж крайовими умовами, що і V_k , то

$$\varphi(\alpha) = J[\alpha V_k + (1-\alpha)(u_k - \omega)] \geq J(V_k).$$

Рівність досягається при $\alpha=1$, тому $\varphi'(1)=0$, звідки

$$\iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 V_K}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau - \\ - \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \frac{\partial^2 V_K}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \cdot \frac{\partial^2 (u_K - \omega)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} d\tau = 0.$$

Таким чином,

$$J(V_K) = I(V_K, u_K - \omega),$$

де

$$I(u, v) = \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} d\tau,$$

маємо

$$J[V_K - (u_K - \omega)] = \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 [V_K - (u_K - \omega)]}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau = \\ = J(V_K) + J(u_K - \omega) - 2I(V_K, u_K - \omega) = J(u_K - \omega) - J(V_K)$$

/із попередньої рівності/.

Оскільки послідовність додатних чисел

$$\dots \leq J(V_K) \leq J(u_K - \omega) \leq J(V_{K-1}) \leq \dots$$

спадає, то вона прямує до певної границі. Отже,

$$|J(u_K - \omega) - J(V_K)| < \varepsilon$$

для $K > N$, де $N = N(\varepsilon)$ - відповідним чином вибране число.

Таким чином,

$$J(V_K - (u_K - \omega)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad K \rightarrow \infty,$$

тобто

$$\iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left[\frac{\partial^2 V_K}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} - \frac{\partial^2 (u_K - \omega)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right]^2 d\tau \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

Це означає, що $\|V_K - (u_K - \omega)\|_{W_2^{(2)}(D)} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$.

При цьому

$$[V_K - (u_K - \omega)] \in L_2^{(2)}(D),$$

$$[V_K - (u_K - \omega)] \in W_2^{(2)}(D), (u_K - \omega) \in W_2^{(2)}(D), V_K \in W_2^{(2)}(D).$$

Оскільки, згідно з теоремою вкладення,

$$\| (u_K - \omega) - V_K \|_C \leq K \| (u_K - \omega) - V_K \|_{W_2^{(2)}},$$

то $(u_K - \omega) - V_K$ збігається до нуля рівномірно в Ω .

Далі

$$\iiint_D |V_K|^2 d\tau \leq C \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 V_K}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau =$$

$$= C J[V_K] \leq C J[V_1] = K.$$

Скористаємося теоремою С.Я. Коган:

Сім'я бігармонічних функцій φ_K , визначених у складеній області D і належних простору $L_2(D)$, компактна у C , якщо $\iiint_D |\varphi_K|^2 d\tau < N^2$ рівномірно для всіх K . Гранична функція є бігармонічною.

Отже, за цією теоремою граничні функції $\bar{V}$ для V_K і $\bar{V}$ для $(u_K - \omega)$, визначені в $D = K_1 \cup \Omega$, і $D = K_2 \cup \Omega$, є бігармонічними в D і збігаються в області $K = K_1 \cap K_2$.

4. Наведена вище схема безпосередньо переноситься і на випадок бігармонічних функцій, що мають особливості заданого типу на замкнених лініях та інших многовидах.

Список літератури: І. К о г а н С.Я. О решении пространственной задачи теории упругости альтернирующим методом Шварца. - Известия АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 3. 2. М и х л и н С.Г. Об алгоритме Шварца. - ДАН СССР, 1951, т.37, № 3, 4. 3. С о б о л е в С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости. - ДАН СССР, 1936, № 4. 4. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974.

І. Д. Квіт

ПРО РОЗШЕПЛЕННЯ ОДНІЄЇ АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНОЇ
ВИПАДКОВОЇ ЗМІННОЇ НА ДОБУТОК
ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ СИГНУЛЯРНИХ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots$ - послідовність незалежних двозначних випадкових змінних, причому

$$\mathcal{P}\{\xi_k = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{1}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad /I/$$

Тоді відбиття випадкової змінної ξ_k

$$\varphi_k(z) = \frac{1 + e^{\frac{z-1}{2^k}}}{2} = e^{\frac{z-1}{2^{k+1}}} \operatorname{ch} \frac{z-1}{2^{k+1}}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z,$$

а відбиття добутку $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ набуває вигляду

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) = e^{\frac{z-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{z-1}{2}}{\frac{z-1}{2}} = \frac{e^{z-1} - 1}{z-1}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z.$$

Та відбиття логарифмічно рівномірної випадкової змінної з густиною

$$\lambda(t) = \frac{1}{t}, \quad 1 < t < e$$

$$\varphi(z) = \int_1^e t^{z-1} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{e^z - 1}{z}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z.$$

Отже, за теоремою єдиності, для відбиття $[I]$ випадкова змінна

$\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є логарифмічно рівномірною на відрізку $[1, e]$, і, таким чином, абсолютно неперервна.

Запишемо тепер випадкову змінну ξ у вигляді добутку

$$\xi = \left(\prod_{\nu=1}^{\infty} \xi_{2\nu} \right) \cdot \left(\prod_{\nu=1}^{\infty} \xi_{2\nu-1} \right) = \eta \cdot \zeta,$$

де η - добуток множників з парними індексами, а ζ - з непарними. На основі /I/ маємо

$$\mathcal{P}\{\xi_{2\nu} = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_{2\nu} = e^{\frac{1}{4^\nu}}\} = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{P}\{\xi_{2\nu-1} = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_{2\nu-1} = (e^{\frac{1}{4\nu}})^2\} = \frac{1}{2}, \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Визначимо випадкові змінні τ_ν умовами

$$\mathcal{P}\{\tau_\nu = 1\} = \mathcal{P}\{\tau_\nu = (e^{\frac{1}{4\nu}})^3\} = \frac{1}{2}, \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad /2/$$

Доведемо, що випадкова змінна $\tau = \prod_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu$ сингулярна. Звідси випливатиме, що змінні η і ξ також сингулярні, оскільки

$$\xi_{2\nu} = \tau_\nu^{\frac{1}{2}} \quad \text{і} \quad \xi_{2\nu-1} = \tau_\nu^{\frac{3}{2}}.$$

На підставі /2/ одержуємо

$$\tau = \prod_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu \geq \prod_{\nu=1}^{\infty} 1 = 1, \quad \tau = \prod_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu \leq \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{3}{4\nu}} = e^{\frac{3}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}} = e.$$

Отже, випадкова змінна τ набуває своїх значень між 1 та e , і її функція розподілу

$$F(t) = 0, \quad t < 1; \quad F(t) = 1, \quad t \geq e.$$

Залежно від значень τ_1 дістаємо

$$\tau = 1 \cdot \prod_{\nu=2}^{\infty} \tau_\nu \leq \prod_{\nu=2}^{\infty} e^{\frac{3}{4\nu}} = e^{\frac{3}{4}}, \quad \tau = e^{\frac{3}{4}} \cdot \prod_{\nu=2}^{\infty} \tau_\nu \geq e^{\frac{3}{4}}.$$

Звідси нерівність $e^{\frac{3}{4}} < \tau < e^{\frac{3}{4}}$ неможлива і

$$F(t) = \frac{1}{2}, \quad e^{\frac{3}{4}} < t < e^{\frac{3}{4}};$$

стрибок функції розподілу $F(t)$ не більший від 1/2. Залежно від значень τ_1 і τ_2 маємо, що

$$\tau = 1 \cdot 1 \cdot \prod_{\nu=3}^{\infty} \tau_\nu \leq \prod_{\nu=3}^{\infty} e^{\frac{3}{4\nu}} = e^{\frac{1}{8}}, \quad \tau = 1 \cdot e^{\frac{3}{4}} \cdot \prod_{\nu=3}^{\infty} \tau_\nu \geq e^{\frac{1}{8}},$$

та

$$\tau = e^{\frac{3}{4}} \cdot 1 \cdot \prod_{\nu=3}^{\infty} \tau_\nu \leq e^{\frac{3}{4}} \prod_{\nu=3}^{\infty} e^{\frac{3}{4\nu}} = e^{\frac{13}{16}}, \quad \tau = e^{\frac{3}{4}} \cdot e^{\frac{3}{4}} \cdot \prod_{\nu=3}^{\infty} \tau_\nu \geq e^{\frac{15}{16}}.$$

Звідси нерівності $e^{\frac{1}{8}} < \tau < e^{\frac{1}{8}}$ та $e^{\frac{13}{16}} < \tau < e^{\frac{15}{16}}$ неможливі, отже

$$F(t) = \frac{1}{4}, \quad e^{\frac{1}{8}} < t < e^{\frac{3}{8}}, \quad F(t) = \frac{3}{4}, \quad e^{\frac{13}{16}} < t < e^{\frac{15}{16}};$$

стрибок функції розподілу $F(t)$ не більший від $\frac{1}{4}$. Очевидно, що з урахуванням значень τ_1, τ_2 і τ_3 дістаємо

$$F(t) = \frac{1}{8}, e^{\frac{1}{64}} < t < e^{\frac{3}{64}}; F(t) = \frac{3}{8}, e^{\frac{13}{64}} < t < e^{\frac{15}{64}}$$

та

$$F(t) = \frac{5}{8}, e^{\frac{19}{64}} < t < e^{\frac{51}{64}}; F(t) = \frac{7}{8}, e^{\frac{61}{64}} < t < e^{\frac{63}{64}};$$

стрибок функції розподілу $F(t)$ не більший від $\frac{1}{8}$. Після врахування значень перших n множників τ приходимо до висновку, що стрибок функції розподілу $F(t)$ не більший від $\frac{1}{2^n}$. Отже, функція розподілу $F(t)$ випадкової змінної $\tau = \prod_{v=1}^{\infty} \tau_v$ неперервна. Покажемо, що вона стала майже всюди на відрізку $[1, e]$.

За допомогою логарифмічної функції встановимо взаємно-однозначну відповідність між точками відрізків $[1, e]$ і $[0, 1]$. Тоді інтервалам постійності функції розподілу $F(t)$ відповідатимуть на відрізку $[0, 1]$ інтервали $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$; $(\frac{1}{16}, \frac{3}{16})$; $(\frac{13}{16}, \frac{15}{16})$; $(\frac{1}{64}, \frac{3}{64})$; $(\frac{13}{64}, \frac{15}{64})$; $(\frac{49}{64}, \frac{51}{64})$; $(\frac{61}{64}, \frac{63}{64})$ і т.ін. зі сумарною одиничною довжиною

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{32} + \dots = 1.$$

Отже, функція розподілу $F(t)$ стала майже всюди на відрізку $[1, e]$, і ріст її відбувається там на множині точок з мірою нуль. Таким чином, випадкова змінна τ сингулярна. Звідси, абсолютно неперервна випадкова змінна $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ розщеплюється на добуток двох сингулярних випадкових змінних

$$\eta = \prod_{v=1}^{\infty} \xi_{2v} = \tau^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \zeta = \prod_{v=1}^{\infty} \xi_{2v-1} = \tau^{\frac{2}{3}}.$$

Розглянутий приклад показує, що добуток зчисленної кількості незалежних двозначних випадкових змінних може бути абсолютно неперервною або сингулярною випадковою змінною. Добуток двох незалежних сингулярних випадкових змінних може бути абсолютно неперервною випадковою змінною.

Відзначимо, що коли /I/ замінити на

$$\mathcal{P}\{\xi_k = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{1}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \quad (k=1, 2, \dots),$$

то $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ логарифмічно рівномірно випадкова змінна з густиною

$$\mu(t) = \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{e} < t < 1 \quad \text{і відбиттям}$$

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{1-z}}{z - 1}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z.$$

Добуток множників ξ з парними /непарними/ індексами знову буде сингулярною випадковою змінною.

Якщо співвідношення /I/ замінити на

$$\mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{a}{2^k}}\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{a}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \quad (a > 0; k=1, 2, \dots), \quad /3/$$

то відбиття ξ_k дорівнюватиме

$$\varphi_k(z) = \frac{e^{-\frac{a}{2^k}(z-1)} + e^{\frac{a}{2^k}(z-1)}}{2} = \operatorname{ch} \frac{a(z-1)}{2^k}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z,$$

і добуток $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ буде логарифмічно рівномірною випадковою змінною з густиною $\mu(t) = \frac{1}{2at}$, $e^{-a} < t < e^a$, $a > 0$ та відбиттям

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sh} a(z-1)}{a(z-1)}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z.$$

Добуток випадкових змінних ξ_k

$$\mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{b-a}{2^{k+1}}}\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{b-a}{2^{k+1}}}\} = \frac{1}{2}, \quad /4/$$

$$(-\infty < a < b < \infty; k=1, 2, \dots)$$

на імпульс у точці $e^{\frac{a+b}{2}}$ має відбиття

$$\varphi(z) = e^{\frac{a+b}{2}(z-1)} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{(b-a)(z-1)}{2^{k+1}} =$$

$$= e^{\frac{a+b}{2}(z-1)} \frac{\operatorname{sh} \frac{(b-a)(z-1)}{2}}{\frac{(b-a)(z-1)}{2}} = \frac{e^{\frac{b}{2}(z-1)} - e^{\frac{a}{2}(z-1)}}{(b-a)(z-1)}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z$$

логарифмічно рівномірної випадкової змінної з густиною

$$\mu(t) = \frac{1}{(b-a)t}, \quad e^a < t < e^b, \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Всі міркування, проведені для випадку /I/, зберігаються для випадків /3/ і /4/.

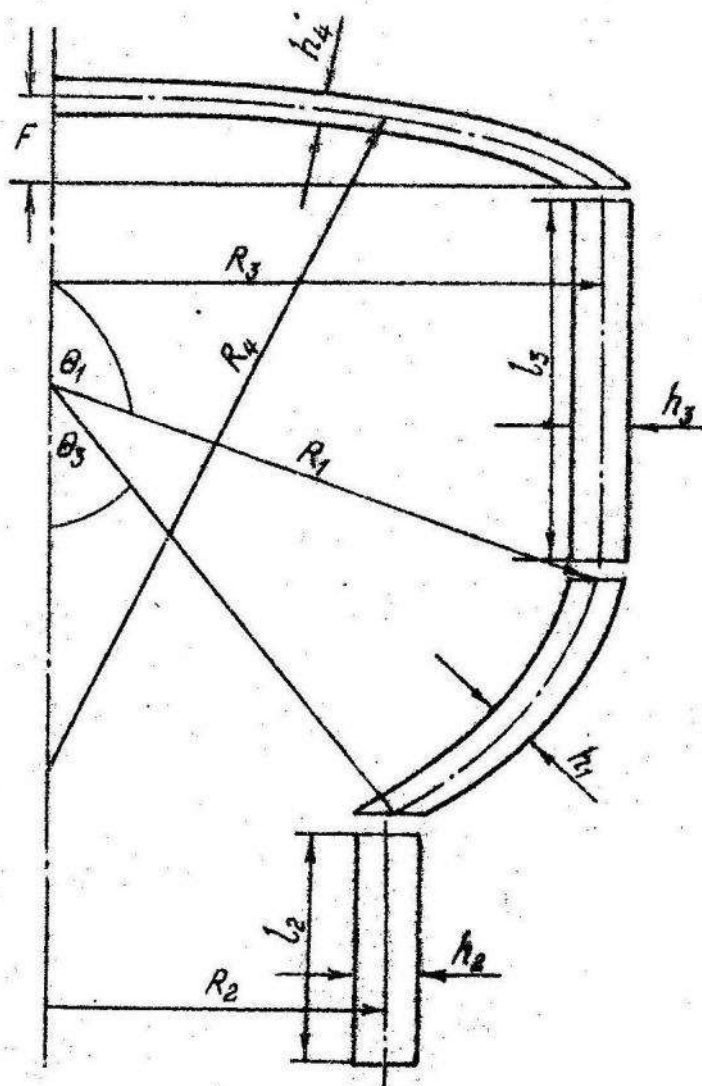
Список літератури: І. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів.ун-ту, сер.мех.-мат., 1978, вип.ІЗ.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Розглядаємо задачу мінімізації по вазі на міцність конструкції, що складається з чотирьох спряжених між собою оболонок обертання: двох сферичних і двох циліндричних /див.рисунок/. Конструкція знаходиться під рівномірним зовнішнім тиском $q = \text{const}$. Мінімум ваги /об'єму/ шукається при обмеженнях, що накладені на максимальні розтягуючі напруження і деякі геометричні параметри.



Отже, задача оптимального проектування по вазі /об'єму/ на міцність формулюється так:

знайти мінімум

$$V/\pi = 2(\cos \theta_1 + \cos \theta_3) R_1^2 h_1 + 2 R_2 l_2 h_2 + 2 R_3 l_3 h_3 + 2 R_4 F h_4 + h_4^3/6 \quad /1/$$

при обмеженнях

$$\sigma_z^{\max} \leq [\sigma]; \quad \sigma_x^{\max} \leq [\sigma]; \quad /2/$$

$$\sigma_\theta^{\max} \leq [\sigma]; \quad \alpha h_2 \geq h_3;$$

$$h_i > 0; \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad /3/$$

де $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_\theta$ - згинні напруження на зовнішній поверхні конструкції відповідно у сферичній оболонці товщини h_4 , циліндричній оболонці товщини h_3 і сферичній оболонці товщини h_1 ; $[\sigma]$ - допустиме напруження.

За регульовані параметри обираються товщини оболонок h_1, h_2, h_3 і h_4 .

Апроксимуючи функції одночленими поліномами [3], отримуємо таку задачу геометричного програмування [1]:

мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) \approx V/\pi = C_0 h_1^{b_{22}} h_2^{b_{32}} h_3^{b_{42}} h_4^{b_{52}} \quad /4/$$

при обмеженнях

$$g_1(\bar{h}) \approx \sigma_z^{\max}/[\sigma] = C_1 h_1^{b_{23}} h_2^{b_{33}} h_3^{b_{43}} h_4^{b_{53}} \leq 1;$$

$$g_2(\bar{h}) \approx \sigma_x^{\max}/[\sigma] = C_2 h_1^{b_{24}} h_2^{b_{34}} h_3^{b_{44}} h_4^{b_{54}} \leq 1; \quad /5/$$

$$g_3(\bar{h}) \approx \sigma_\theta^{\max}/[\sigma] = C_3 h_1^{b_{25}} h_2^{b_{35}} h_3^{b_{45}} h_4^{b_{55}} \leq 1;$$

$$g_4(\bar{h}) = C_4 h_2^{-1} h_3 \leq 1;$$

$$h_i > 0; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad /6/$$

$$\text{де } b_{jk} = \left(h_{j-1} \frac{\partial g_{k-2}(\bar{h})}{\partial h_{j-1}} / g_{k-2}(\bar{h}) \right)_{\bar{h}=\bar{h}^*};$$

$$C_{k-2} = \left(g_{k-2}(\bar{h}) / \left(\prod_{j=2}^5 h_{j-1}^{b_{jk}} [\sigma] \right) \right)_{\bar{h}=\bar{h}^*}; \quad j, k = 2, 3, 4, 5.$$

Ступінь важкості задачі /4/ - /6/ дорівнює нулеві.

Складена програма на алгоритмічній мові Алгол-60, що визначає точки, у яких виникають максимальні напруження, апроксимує функції одночленними поліномами, визначає оптимальні товщини і розподіл напружень в оптимальній конструкції. Для уточнення одержаного розв'язку використовували ітераційний процес [2].

Програма реалізована при таких значеннях фіксованих параметрів:

$$\begin{aligned} q &= 0,01 \text{ кг/мм}^2; E = 6240 \text{ кг/мм}^2; [\sigma] = 0,9 \text{ кг/мм}^2; \nu = 0,2; \\ R_1 &= 100 \text{ мм}; R_2 = 40 \text{ мм}; R_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R_1; R_4 = (R_3^2 + F^2)/2F; \\ \ell_2 &= 25 \text{ мм}; C_4 = 0,25; \theta_1 = \frac{2}{3} \pi; \theta_3 = \arcsin(R_2/R_1). \end{aligned}$$

Оптимальні товщини і об'єм конструкції:

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 &= 25 \text{ мм} \\ F &= 2 \text{ мм} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_1 &= 5,74 \text{ мм}; h_2 = 2,74 \text{ мм}; h_3 = 9,88 \text{ мм}; h_4 = 6,17 \text{ мм}; \\ V/\pi &= 0,14 \cdot 10^6 \text{ мм}^3; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 &= 25 \text{ мм} \\ F &= 10 \text{ мм} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_1 &= 0,54 \text{ мм}; h_2 = 1,28 \text{ мм}; h_3 = 5,12 \text{ мм}; h_4 = 4,40 \text{ мм}; \\ V/\pi &= 0,63 \cdot 10^5 \text{ мм}^3; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 &= 10 \text{ мм} \\ F &= 2 \text{ мм} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_1 &= 9,52 \text{ мм}; h_2 = 2,50 \text{ мм}; h_3 = 9,98 \text{ мм}; h_4 = 6,31 \text{ мм}; \\ V/\pi &= 0,15 \cdot 10^6 \text{ мм}^3; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 &= 10 \text{ мм} \\ F &= 10 \text{ мм} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_1 &= 3,07 \text{ мм}; h_2 = 1,31 \text{ мм}; h_3 = 5,24 \text{ мм}; h_4 = 4,52 \text{ мм}; \\ V/\pi &= 0,72 \cdot 10^5 \text{ мм}^3. \end{aligned}$$

У конструкції, циліндрична оболонка якої спряжена зі сферичною оболонкою, оптимальні товщини і об'єм конструкції значно більші, ніж у конструкції, циліндрична оболонка якої товщини h_3 спряжена з пластинкою [4].

Як і слід було чекати, оптимальні товщини оболонок і об'єм конструкції зменшуються зі збільшенням стріли підйому.

Список літератури: І. Даффі Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. - М.: Мир, 1972.
2. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. - М.: Мир, 1973. 4. Ощипко Л.Й., Іванків К.С., Юдіна Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., 1977, вип. І2. 4. Ощипко Л.Й., Миськів О.А. Оптимальний розрахунок складових оболонок обертання. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. І4.

УДК 517.958:681.3.057

Г.А.Шинкаренко, С.С.Григорян, І.І.Дияк

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ТЕПЛООБМІНУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Процес нестационарного конвективного осесимметричного теплообміну при відсутності внутрішніх джерел тепла описується рівнянням

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (r, z) \in \Omega \quad /1/$$

з крайовою і початковою умовами

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha (u - f), \quad (r, z) \in \Gamma, \quad /2/$$

$$u(r, z, 0) = u_0(r, z), \quad (r, z) \in \Omega. \quad /3/$$

де Ω - меридіанний перетин тіла, віднесений до циліндричної системи координат; Γ - границя області Ω ; λ , α , c - відповідно коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі і теплоємності; f , u_0 - відомі значення температури навколишнього середовища і початкового розподілу температури; ν - напрям зовнішньої нормалі до контуру Γ .

Варіаційна постановка задачі /1/-/3/ формулюється так [2]: знайти таку функцію $u \in W_2^1(\Omega)$, яка задовольняє варіаційне рівняння

$$(cu, v) + a(u, v) = [f, v] \quad \forall v \in W_2^1(\Omega) \quad /4/$$

і початкову умову /3/. Тут використано наступні позначення:

$(\dots), [\dots]$ - скалярний добуток в $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$; $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$;

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) z dz dz + \int_{\Gamma} \alpha u v r ds.$$

Триангулюємо область Ω деяким набором трикутних елементів Ω_e і побудуємо скінченновимірний простір $V_N^h \subset W_2^1(\Omega)$ кусково-лінійних функцій, база якого $\varphi_i(z, z)$, $i = 1, 2, \dots, N$, визначається таким чином: 1/ кожній функції φ_i ставиться у відповідність вершина на $P_i(z, z)$ так, що $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера; 2/ в функції φ_i , за виключенням тих, які відповідають вершинам елемента Ω_e , дорівнюють нулеві всюди на Ω_e . Побудований простір V_N^h має таку властивість апроксимації [4]: для кожної функції $v \in W_2^1(\Omega)$ існує $v^h \in V_N^h$ така, що $\|v - v^h\| + h \|v - v^h\|_1 < Ch^2 \|v\|_2$, де $\|\cdot\|_K$ - норма простору $W_2^K(\Omega)$; h^0 - максимальний діаметр трикутників Ω_e .

Після дискретизації по просторових змінних наближений розв'язок задачі записуємо у вигляді суми

$$u^h = \sum_{j=1}^N q_j(t) \varphi_j(z, z) = \varphi q$$

і для визначення функцій $q_j(t)$ на основі рівняння /4/ дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь N -го порядку

$$M \dot{q}(t) + K q(t) = F(t), \quad /5/$$

де M, K - постійні додатно визначені матриці з елементами $M_{ij} = (c \varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) F(t)$ - вектор з компонентами $F_i(t) = [f, \varphi_i]$. Вони обчислюються згідно звичайної процедури методу скінченних елементів /МСЕ/ [3] підсумовуванням їх значень по всіх елементах триангуляції. Наприклад, якщо трикутник Ω_e визначається вершинами $P_t(z, z)$, $t = l, m, n$ і його сторона $P_m P_n$ лежить на границі Γ , то доданки у матриці M, K, F визначаються формулами

$$M_{ij}^e = \begin{cases} \frac{2c\Delta_e}{5!} (z_0 + 2z_i), & i=j \\ \frac{2c\Delta_e}{5!} (z_0 - z_k), & i \neq j \end{cases},$$

$$K_{ij}^e = \lambda \frac{z_0}{3!} S_{ij} + 2\alpha \frac{L}{4!} \delta_{im} \delta_{jn} [(2\delta_{im} \delta_{jn} + 1)z_m + (2\delta_{jn} \delta_{im} + 1)z_n],$$

$$F_i^e(t) = \alpha \frac{L}{4!} (\delta_{im} + \delta_{in}) \{f_m[(2\delta_{im} + 1)z_m + z_n] + f_n[(2\delta_{in} + 1)z_n + z_m]\},$$

де i, j, k - циклічна перестановка індексів ℓ, m, n ; Δ_e - площа трикутника Ω_e ; $z_0 = z_\ell + z_m + z_n$; $S_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) / \Delta_e$; $b_i = z_j - z_k$; $c_i = z_k - z_j$; δ_{ij} - символ Кронекера; $f_i = f(z_i, z_i, t)$; L - довжина сторони $\rho_m \rho_n$. Якщо сторона $\rho_m \rho_n$ не збігається з границею Γ , то в формулах для обчислення коефіцієнтів K_{ij}^e , F_i^e потрібно прийняти $L=0$.

Початкова умова для системи /5/ одержується природно, якщо зауважити, що функція $q_j(t)$ визначає поведінку температури у вузлі $P_j(z_j, z_j)$. Таким чином

$$q_j(0) = u_0(z_j, z_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad /6/$$

Задача Коші /5/, /6/ визначається жорсткою системою рівнянь /5/, що зумовлює використання безумовно стійких схем її чисельного інтегрування. Зокрема, застосовуючи до /5/ формулу трапецій з кроком інтегрування Δt , дістаємо схему Кранка-Ніколсона

$$-(M + \frac{1}{2} \Delta t K) q^{n+1} = (M - \frac{1}{2} \Delta t K) q^n + \frac{1}{2} \Delta t (F^{n+1} + F^n), \quad /7/$$

де $q^n = q(n \Delta t)$; $F^n = F(n \Delta t)$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $q^0 = q(0)$.

При чисельній реалізації процесу послідовного розв'язування системи /7/ матрицю $M + \frac{1}{2} \Delta t K$ зручно зобразити у вигляді добутку $L^T L$, де L - нижня трикутна матриця Холецкого. Тоді на кожному кроці по часу вектор q^{n+1} визначається двома оберненими підстановками

$$L q^{n+1/2} = (M - \frac{1}{2} \Delta t K) q^n + \frac{1}{2} \Delta t (F^{n+1} + F^n),$$

$$L^T q^{n+1} = q^{n+1/2}.$$

Такий алгоритм розв'язування задачі Коші дає змогу: I/ використовувати достатньо великі кроки по часу - їхня величина обмежується лише оцінкою похибки $O[h^2 + (\Delta t)^3] \lg \frac{1}{\Delta t}$ в L_2 - нормі [6];

2/ проводити обчислення з меншою кількістю операцій, ніж цього вимагають методи Рунге-Кутта чи ітераційні методи. Аналіз інших схем можна знайти у працях [5, 6].

Представлений алгоритм реалізований у комплексі ФОРТРАН-програм для ЕОМ BESM-6. Нижче подано деякі результати проведених чисельних досліджень.

t	τ				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	10216	9914	10069	9978	9574
	10000	10000	10000	10000	10000
	10000	10000	10000	10000	10000
0,02	10000	10002	9989	9771	8494
	10000	9999	9989	9861	8166
	10000	10000	10000	9808	8499
0,04	10000	9988	9881	9360	7920
	9997	9989	9916	9401	8078
	10000	9996	9905	9380	7920
0,08	9896	9808	9454	8620	7145
	9928	9842	9483	8669	7233
	9927	9835	9483	8646	7161
1,00	2493	2431	2252	1970	1602
	2854	2780	2510	2202	1794
	-	-	-	-	-
2,00	515	502	465	407	331
	695	679	637	540	481
	-	-	-	-	-

У таблиці наведено значення температури $u \cdot 10^4$ нескінченного циліндра одиничного радіуса при таких даних задачі: $\lambda = C = \alpha = 1$, $u_0 = 1$, $f = 0$. Крок сітки по просторових змінних дорівнює 0,125. Верхнє число кожної графі - аналітичний розв'язок [1] з врахуванням п'яти перших членів розкладу в ряд, середнє - розв'язок МСЕ з $\Delta t = 0,02$, нижнє - розв'язок МСЕ з $\Delta t = 0,002$. Помітно, що вибрана сітка по просторових змінних дає змогу достатньо добре апроксимувати точний розв'язок задачі, оскільки зменшення кроку по часу значно поліпшує характер наближеного розв'язку.

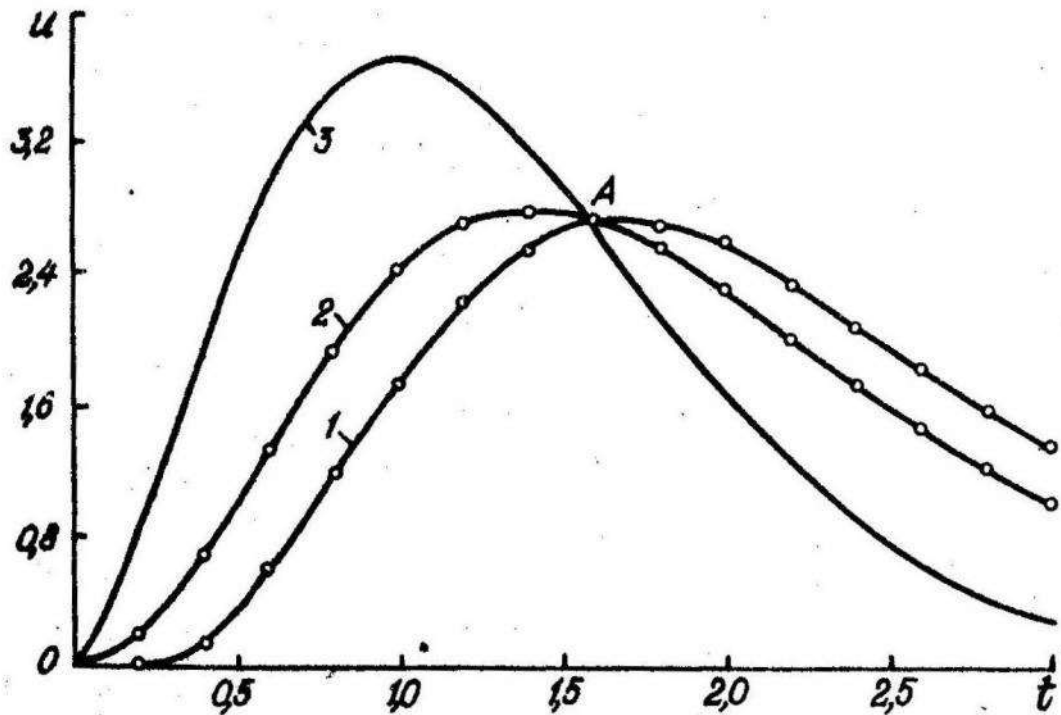


Рис. 1.

На рис. 1 показано зміну температури в часі на осі /крива 1/ та зовнішній поверхні /крива 2/ нескінченного циліндра одиничного радіуса. Показано також графік /крива 3/ зміни температури зовнішнього середовища $f = f(t) = 10t^{3/2} \exp(-t^{3/2})$. Решта параметрів задачі така: $\lambda = c = \alpha = 1$, $u_0 = 0$, $\Delta t = 0,02$.

Зауважимо, що момент часу, коли температура поверхні вирівнюється з температурою середовища, характеризується крайовою умовою $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$; це означає, що крива температури поверхні має горизонтальну дотичну. Чисельні результати підтверджують цей факт /точка А на рис. 1/.

Графіки рис. 2 показують, що в кожний конкретний момент часу температура є монотонною функцією радіальної змінної. Це явище повністю узгоджується з принципом максимуму для параболічних рівнянь і означає, що при нерівномірній зміні температури середовища у процесі конвективного теплообміну можуть існувати такі моменти часу, коли температура стає постійною у межах тіла. У наших умовах цей момент часу відповідає значенню $t = 1,62$ і характеризується точкою А на рис. 1.

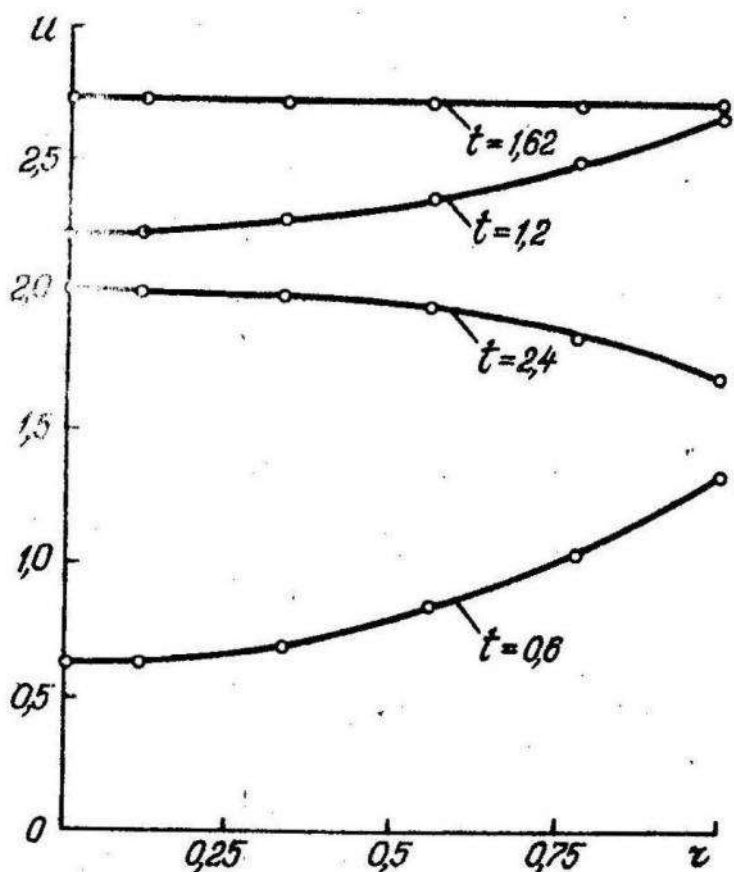


Рис. 2.

Зроблений аналіз свідчить про високу якість наближеного розв'язку, одержаного методом скінченних елементів.

Автори висловлюють вдячність проф. Н.П.Флейшману і доц.Я.Г.Савулі за обговорення результатів у процесі виконання роботи.

Список літератури: 1. К у т а т е л а д з е С.С. Основы теории теплообмена. - Новосибирск: Наука, 1970. 2. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 3. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е ч к о Г.А. Метод скінченних елементів. - Львів: Вища школа, 1976. 4. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. 5. Zlamal M. *Finite element method for parabolic equations.* - *Lect. Notes Math.*, 1974, №363. 6. Zlamal M. *Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems.* - *Math. Comput.*, 1975, vol. 29, № 130.

З.С.Бережанська, І.Б.Прокопович

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ТРІЩИНАМИ

Пропонуємо алгоритм розв'язування просторової задачі теплопровідності для середовища з щілинами методом інтегральних рівнянь. За допомогою теплового потенціалу простого шару задача зводиться до розв'язування інтегрального рівняння першого роду з невідомою густиною джерел. На кожному кроці по часу густина вважається лінійною функцією змінної часу, а по просторових координатах апроксимується лінійною комбінацією дробово-раціональних функцій з невідомими коефіцієнтами [3]. Останні визначаються послідовним розв'язуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які відрізняються лише правими частинами.

Нехай у деякому тривимірному середовищі, що знаходиться попередньо при нульовій температурі, розташована система $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ тонких скінченних розімкнутих поверхонь, рівняння яких зображені у вигляді

$$x_j^{(i)} = f_j^{(i)}(\alpha), \quad i = (\overline{1, m}), \quad j = (\overline{1, 3}), \quad \alpha = (\alpha^1, \alpha^2).$$

Потрібно визначити функцію $T(x, \tau)$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 T(x, \tau) \quad /1/$$

у просторі R^3 , початкову $T(x, 0) = 0$ і граничну умову на поверхні S

$$T(x, \tau)|_S = \psi(x, \tau) S_+(\tau), \quad S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases} \quad /2/$$

Розв'язок задачі /1/ - /2/ зобразимо у вигляді теплового потенціалу простого шару

$$T(\bar{x}, t) = \int_0^t d\tau \iint_S Q(\bar{x}, \tau) \delta(\bar{z}, \tau, t) d\bar{z}, \quad \bar{x} \in R^3, \quad /3/$$

де $\delta(z, \tau, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp[-z^2/4(t-\tau)] / (t-\tau)^{3/2}$ - функція впливу теплового джерела; $z = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2}$ - відстань між біжучою точкою x на поверхні S і фіксованою точкою $\bar{x}$ простору; $Q(\alpha, \tau)$ - поверхнева густина джерел, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^t d\tau \iint_{S_i} Q^{(i)}(\alpha, \tau) \delta(z, \tau, t) d\alpha = \psi^{(i)}(\bar{x}, t), \bar{x} \in S. \right. \quad /4/$$

Розіб'ємо проміжок часу $(0, t)$ на $n-1$ частин точками $t_1 = 0, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n = t$ і на кожному відрізку часу $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ невідому густину зобразимо у вигляді кусково-неперервної функції

$$Q^{(i)}(\alpha, \tau) = Q^{(i)}_{k-1}(\alpha, \tau) = q^{(i)}_{k-1}(\alpha) \frac{t_k - \tau}{t_k - t_{k-1}} + q^{(i)}_k(\alpha) \frac{\tau - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}. \quad /5/$$

Тут невідомі функції $q^{(i)}_k(\alpha)$ вибираються у вигляді [3]

$$q^{(i)}_k(\alpha) = \sum_{v=1}^L \frac{a_{v,k} b_{v,k}^{(i)}}{[b_{v,k}^{(i)}]^2 + (\alpha^1 - \alpha_v^{(i)})^2 + (\alpha^2 - \alpha_v^{2(i)})^2}. \quad /6/$$

Враховуючи /5/, після деяких перетворень отримаємо наближений аналог інтегрального рівняння /4/

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \iint_{\Delta i} F^{(i)}(\alpha) \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} Q^{(i)}_{n-1}(\alpha, \tau) \delta(z, t_n, \tau) d\tau \right] d\alpha^1 d\alpha^2 + \sum_{k=2}^{n-1} R^{(i)}_{k-1}(Q_{k-1}, t_n) \right\} = \psi^{(i)}(\bar{x}, t), \bar{x} \in S, /7/$$

де $F(\alpha)$ - Якобіан переходу від координат x до координат α ;

$$R^{(i)}_{k-1}(Q_{k-1}, t_n) = \iint_{\Delta i} F^{(i)}(\alpha) \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} Q^{(i)}_{k-1}(\alpha, \tau) \delta(z(\alpha), t_n, \tau) d\tau \right] d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Будемо вважати, що $t_k - t_{k-1} = h$ ($k = \overline{2, n}$). Обчисливши у рівнянні /7/ інтеграли, які залежать від часу, отримаємо

$$\begin{aligned} & 1/2\sqrt{\pi} \sum_{i=1}^m \iint_{\Delta i} q^{(i)}_n(\alpha) F^{(i)}(\alpha) \nabla_j^2 P d\alpha^1 d\alpha^2 = \psi^{(i)}(\bar{x}, t) - \\ & - 1/2\sqrt{\pi} \sum_{i=1}^m \iint_{\Delta i} \sum_{k=2}^{n-1} q^{(i)}_k(\alpha) F^{(i)}(\alpha) \nabla_j^2 P d\alpha^1 d\alpha^2, \end{aligned} \quad /8/$$

де $j = n - k - 1$, $\nabla_j^2 P$ - скінченна різниця другого порядку функції P

$$\nabla_j^2 P = \nabla_j^2 U - \nabla_j^2 V; \quad \nabla_j^2 U = \nabla_j^2 (CA); \quad \nabla_j^2 V = \frac{z}{h} \nabla_j^2 E;$$

$$A = \operatorname{erfc}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta; \quad c = \frac{z}{h} + \frac{2j}{z}; \quad E = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta^2} / \theta; \quad \theta = \frac{z}{2\sqrt{j}h};$$

$$A_{-1} = A_0 = E_{-1} = E_0 = 0.$$

Рівняння /8/ використовується для визначення невідомих функцій

$$q^{(i)}_n(\alpha), \text{ якщо } q^{(i)}_k(\alpha) \text{ знайдені на попередніх кроках. Підстав-}$$

ляючи /6/ у /8/ і застосовуючи метод колокації у точках, отримуємо для визначення невідомих $a_{jk}^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої формується тільки один раз для всіх моментів часу t_k .

Підінтегральна функція має особливість, якщо точка інтегрування збігається з точкою колокації. Ця особливість усувається спеціальним вибором точок інтегрування і точок колокації [1]. Для обчислення подвійних інтегралів використовуємо методику праці [2].

Температурне поле у довільній точці $\bar{x}$ середовища знаходимо за формулою

$$T(\bar{x}, t_n) = \frac{1}{2} \pi \sum_{l=1}^m \iint_{\Delta_l} F^{(i)}(\alpha) \sum_{k=2}^n q_k^{(i)}(\alpha) \nabla_j^2 \rho d\alpha' d\alpha''.$$

Для реалізації цього методу складена типова програма на алгоритмічній мові ФОРТРАН. Програма визначає невідомі густини, температуру в довільній точці і перевіряє задоволення граничних умов у проміжних точках, що дає змогу судити про точність розв'язку поставленої задачі. При звертанні до програми необхідно задавати значення температури і геометрію щілин, які можуть бути площинами і поверхнями другого порядку.

Приклад. Розглянемо задачу про тепловий удар для простору з циліндричною тріщиною /рис. I/.

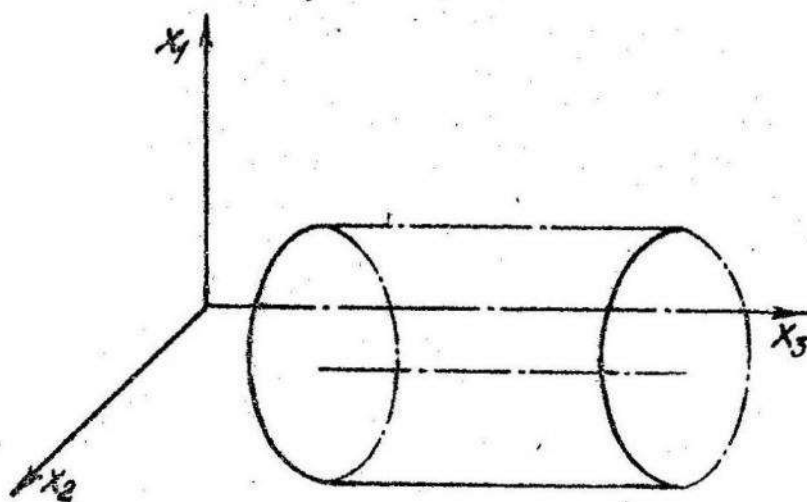


Рис. I.

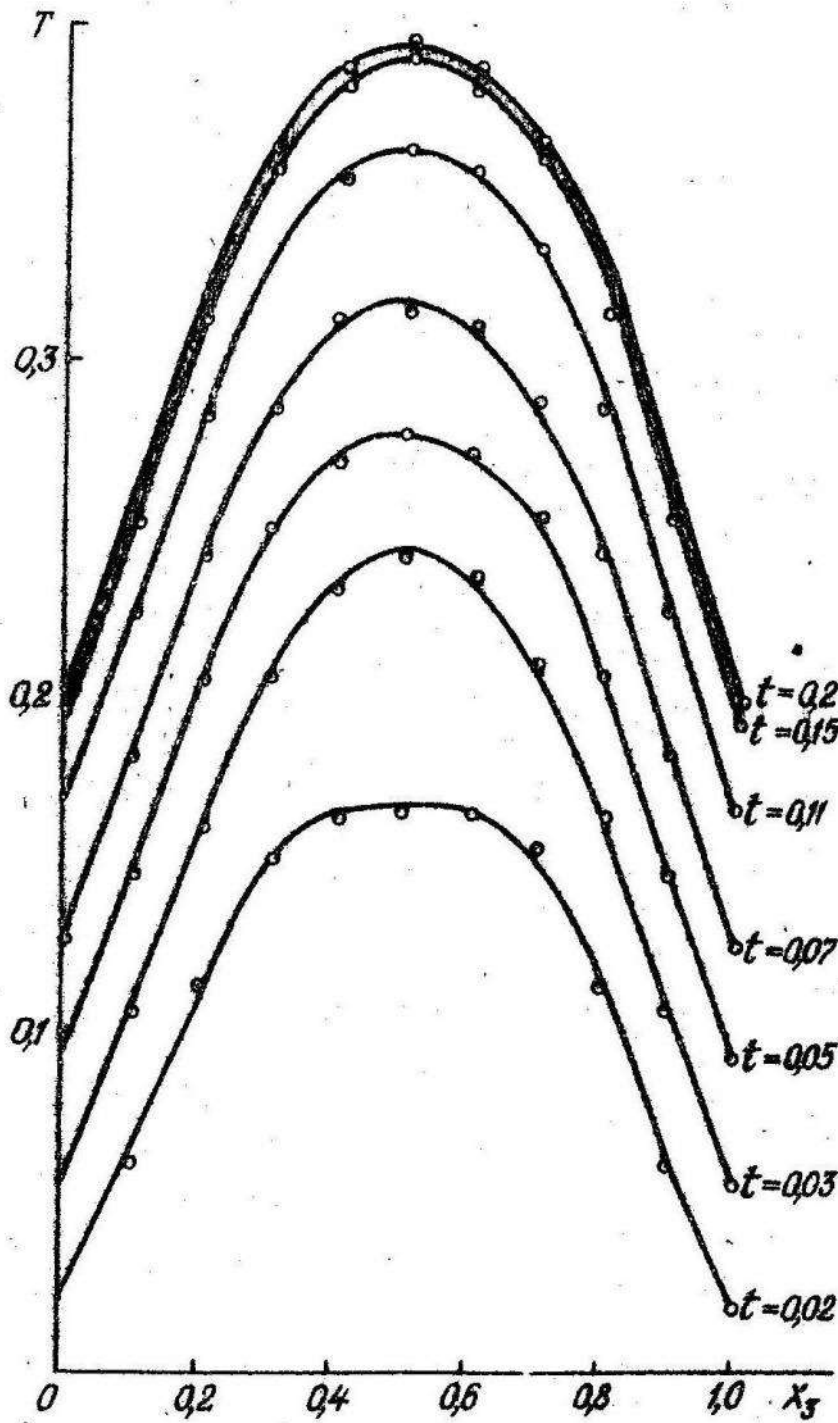


Рис. 2.

Температура середовища і тріщини вважається нульовою. У початковий момент часу температура тріщини миттєво встановлюється рівною $\psi(x, \tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0 \end{cases}$ і постійно підтримується при цих значеннях. Темпе-

ратурне поле зовні тріщини описується рівнянням /1/. Розв'язок задачі здійснено на ЕОМ БЕСМ-6 при таких розмірах тріщини

$$S = \begin{cases} x_1 = 0,204 \cos \alpha^1 + 0,3 & 0 \leq \alpha^1 \leq 2\pi, \\ x_2 = 0,196 \sin \alpha^1 + 0,3 & 0,2 \leq \alpha^2 \leq 0,8, \\ x_3 = \alpha^2. \end{cases}$$

На рис. 2 зображено графік зміни температури вздовж осі OX_3 у різні фіксовані моменти часу. При $t \rightarrow \infty$ нестационарний розв'язок повинен прямувати до стаціонарного, що і отримано при розрахунку.

Список літератури: І. Безлюдний Е.Е., Ракова Л.В. С к л е п у с Н.Г. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Д.Рвачева. - Известия АН БССР, сер. ФМН, 1969, вып. І. 2. Бережанська З.С., Гордійчук В.І. Чисельний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма І-го роду в R^3 . - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. ІЗ. 3. Гордійчук В.І. Численне рішення зовнішньої задачі Дирихле для уравнения Лапласа в R^3 . - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып. 33.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін, О.Є.Кірік

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ БОГОЛЮБОВА-КРИЛОВА

У техніці широко застосовуються конструкції, що містять тонкі металічні смужки, пластини та незамкнуті оболонки. При дослідженні електричних полів, які створюються ними, зручно вважати такі пластини та оболонки нескінченно тонкими, що приводить до необхідності визначати розподіл заряду по незамкнутим провідних поверхнях. Ця задача формується у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [2]

$$\iint_S \frac{G(M)}{R(Q,M)} dS_M = U(Q),$$

де $G(M)$ - шукана густина розподілу заряду по S ; $R(Q,M)$ - від-

стань між точкою інтегрування на поверхні та деякою контрольною точкою $Q \in S$; $U(Q)$ - відомий потенціал на S .

У випадку декількох заряджених поверхонь S можна інтерпретувати як $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$, $G(M) = \{G_i(M)\}_{i=1}^m$ - як кусково неперервну функцію, а інтеграл в /1/ вважати сумою інтегралів по відповідних поверхнях S_i .

Зробивши в /1/ перехід від поверхневого інтегралу до подвійного, одержимо

$$\sum_{i=1}^m \iint_{\Omega_i} \frac{F_i(x,y) G_i(x,y) dx dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [f_i(x,y)-z_0]^2}} = U(x_0, y_0, z_0), \quad /2/$$

де $Z = f_i(x,y)$ - рівняння поверхні S_i у декартовій прямокутній системі координат (x,y,z) , $F_i(x,y) = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$;

$$\Omega_i = \{(x,y): \alpha_i \leq x \leq \beta_i \wedge G_1^{(i)}(x) \leq y \leq G_2^{(i)}(x)\} \text{ або}$$

$$\Omega_i = \{(x,y): \gamma_i \leq y \leq \delta_i \wedge T_1^{(i)}(y) \leq x \leq T_2^{(i)}(y)\}.$$

Для розв'язування інтегрального рівняння /2/ застосуємо метод Боголюбова-Крилова [1]. З цією метою розір'ємо кожну з областей Ω_i на достатню кількість підобластей Δ_k , так що $\Omega_i = \bigcup_{k=1}^{N_i} \Delta_k$. Припустимо, що в межах кожної маленької підобласті Δ_k невідома густина набуває постійного значення G_k . Вибравши контрольні точки /або точки задоволення граничних умов/ у межах підобластей Δ_k і записавши співвідношення /2/ для кожної з них, дістаємо для знаходження G_k систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{N_i} G_k^i A_{i,j}^{\kappa,n} = U(x_n^j, y_n^j, z_n^j), \quad (j = \overline{1, m}; n = \overline{1, N_j}), \quad /3/$$

де

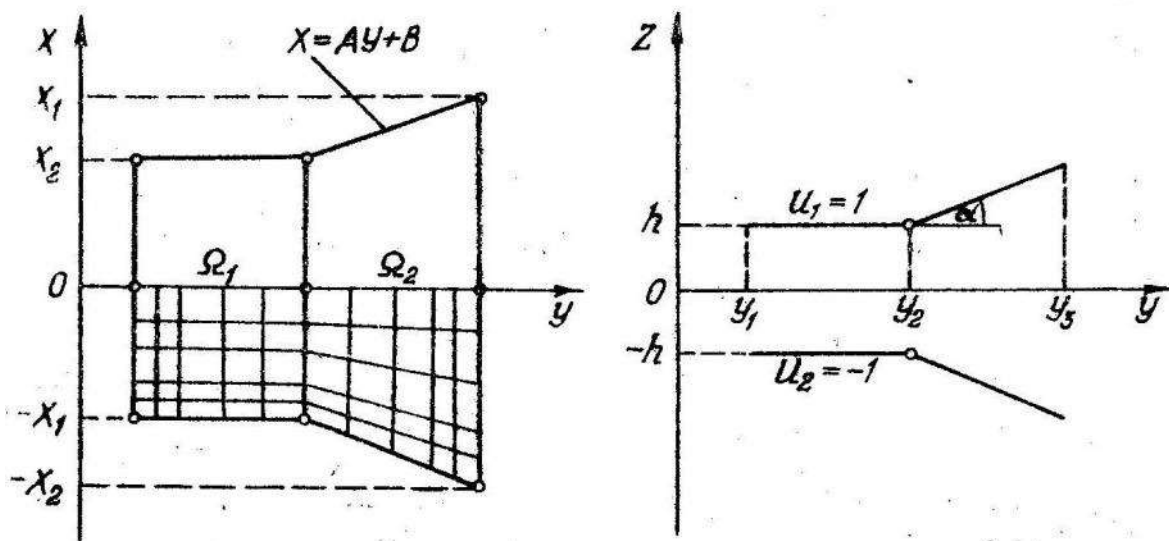
$$A_{i,j}^{\kappa,n} = \iint_{\Delta_k^i} \frac{F_i(x,y) dx dy}{\{(x-x_n^j)^2 + (y-y_n^j)^2 + [f_i(x,y)-z_n^j]^2\}^{1/2}}. \quad /4/$$

Інтегральне рівняння /2/ - першого роду, тобто належить до класу некоректних задач. При побудові системи /3/ контрольні точки обираються довільно у межах підобластей Δ_k , що приводить до

зосередженої особливості в ядрі інтегрального рівняння /2/. Тому слід сподіватись, що матриця системи /3/ невироджена і отриманий наближений розв'язок ϕ_k стійкий.

У деяких випадках вдається обчислити інтеграли /4/ аналітично, що безумовно прискорює розв'язок основної задачі /1/ і не вносить похибки, яка виникає за рахунок застосування формул чисельного інтегрування.

Проілюструємо сказане на прикладі розв'язування конкретної задачі. Нехай потрібно визначити розподіл зарядів на сукупності тонких провідних пластин, показаних на рисунку в проекціях на площини (x, y) і (y, z) декартової прямокутної системи координат (x, y, z) .



Враховуючи симетрію у заданні граничних умов $U_1 = -U_2$, а також симетричне розташування пластин відносно координатних площин $x=0$ та $z=0$, запишемо інтегральне рівняння /2/ у вигляді

$$\sum_{i=1}^2 \iint_{\Omega_i} \phi_i(x, y) [H_i(x, y, x_0, y_0, z_0) + H_i(-x, y, x_0, y_0, z_0)] dx dy = U_i,$$

$$\text{де } H_i = H_1^{(i)}(x, y, x_0, y_0, z_0) - H_2^{(i)}(x, y, x_0, y_0, z_0);$$

$$H_j^{(i)} = \sqrt{1 + (i-1) \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [(-1)^{i-1} (y \operatorname{tg}(i-1)\alpha + h - y_0 \operatorname{tg}(i-1)\alpha) - z_0]^2 \right\}^{-1/2},$$

причому $\Omega_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq x_2 \wedge y_2 \leq y \leq y_2\},$
 $\Omega_2 = \{(x, y): 0 \leq x \leq Ay + B \wedge y_2 \leq y \leq y_3\}.$

Контрольні точки з координатами x_0, y_0, z_0 вибираються на пластині, що мають проєкції Ω_1 та Ω_2 на площині $/x, y/$. Використовуючи вузли Чебишова, розбиваємо Ω_1 на підобласті нерівномірною сіткою, що згущується на краях. Такий спосіб розбиття задається для зменшення похибки при визначенні невідомої густини поблизу краю пластини, де вона має особливість. Далі, обираючи контрольні точки в центрах ваги підобластей, а також на краю поверхні, отримаємо перевизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь типу /3/, яка розв'язується методом найменших квадратів. Контроль точності розв'язку можна здійснювати шляхом перевірки задоволення граничних умов у деяких точках, що лежать між контрольними.

Зауважимо також, що інтеграли типу /4/ в цьому випадку обчислювали з використанням такої узагальненої формули:

$$\int_c^d \int_{ay+b}^{Ay+q} \frac{\sqrt{1+tq^2\alpha}}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (y \operatorname{tg} \alpha - z_0)^2]^{1/2}} dx dy =$$

$$= \bar{c} \ln \frac{\bar{a}\bar{c} + \bar{b} + [(\bar{a}\bar{c} + \bar{b})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}}{\bar{p}\bar{c} + \bar{q} + [(\bar{p}\bar{c} + \bar{q})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}} +$$

$$+ \bar{d} \ln \frac{\bar{p}\bar{d} + \bar{q} + [(\bar{p}\bar{d} + \bar{q})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}}{\bar{a}\bar{d} + \bar{b} + [(\bar{a}\bar{d} + \bar{b})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\bar{q}}{\sqrt{1+\bar{p}^2}} \ln \frac{(1+\bar{p}^2)\bar{d} + \bar{p}\bar{q} + \sqrt{1+\bar{p}^2}[(\bar{p}\bar{d} + \bar{q})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}}{(1+\bar{p}^2)\bar{c} + \bar{p}\bar{q} + \sqrt{1+\bar{p}^2}[(\bar{p}\bar{c} + \bar{q})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\bar{b}}{\sqrt{1+\bar{a}^2}} \ln \frac{(1+\bar{a}^2)\bar{c} + \bar{a}\bar{b} + \sqrt{1+\bar{a}^2}[(\bar{a}\bar{c} + \bar{b})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}}{(1+\bar{a}^2)\bar{d} + \bar{a}\bar{b} + \sqrt{1+\bar{a}^2}[(\bar{a}\bar{d} + \bar{b})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}} +$$

$$+ \sqrt{K} \operatorname{arctg} \frac{\bar{p}K - \bar{q}\bar{d}}{\sqrt{K}[(\bar{p}\bar{d} + \bar{q})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}} - \sqrt{K} \operatorname{arctg} \frac{\bar{p}K - \bar{q}\bar{c}}{\sqrt{K}[(\bar{p}\bar{c} + \bar{q})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}} +$$

$$+ \sqrt{K} \operatorname{arctg} \frac{\bar{a}K - \bar{b}\bar{c}}{\sqrt{K}[(\bar{a}\bar{c} + \bar{b})^2 + \bar{c}^2 + K]^{1/2}} - \sqrt{K} \operatorname{arctg} \frac{\bar{a}K - \bar{b}\bar{d}}{\sqrt{K}[(\bar{a}\bar{d} + \bar{b})^2 + \bar{d}^2 + K]^{1/2}},$$

$$\text{де } \bar{z}_0 = z_0 + ctg\alpha \cdot h; \quad T = \sqrt{1 + tg^2\alpha}; \quad R = (y_0 + \bar{z}_0 tg\alpha)/T;$$

$$K = (\bar{z}_0 + y_0 tg\alpha)^2/T^2; \quad \bar{c} = Tc - R; \quad \bar{d} = Td - R; \quad a = a/T;$$

$$\bar{b} = \bar{a}R + b - x_0; \quad \bar{p} = p/T; \quad \bar{q} = \bar{p}R + q - x_0.$$

Ефективність описаної методики перевіряли за типовою програмою, складеною на алгоритмічній мові ФОРТРАН-IV, при різних кількості невідомих. Середня відносна похибка одержаних розв'язків не перевищує 1%.

Список літератури: І. К а н т о р о в и ч В.Л., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Физматгиз, 1962. 2. Т о з о н и О.В., М а е р г о й з И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев, Техніка, 1974.

УДК 517.949.8

В.А.Бакалець, В.А.Пучка

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

У праці [1] розглянуто один точний метод розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона на площині та в просторі у випадку замкнених гладких кривих /поверхонь/ другого порядку, коли правою частиною рівняння є алгебраїчний поліном довільного степеня. Застосування згаданого методу приводить до побудови матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що є досить громіздким процесом. Мета нашої роботи — автоматизація процесу побудови матриці коефіцієнтів і розв'язування системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо на площині задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U(x, y) = P_n(x, y), \quad /1/$$

$$U(x, y)|_S = 0, \quad /2/$$

$$\text{де } P_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \alpha_{ij} x^i y^j, \quad n=0, 1, \dots; \quad /3/$$

S - еліпс з центром у початку координат і півосями.

Розв'язок задачі /1/ - /2/ шукаємо у вигляді

$$U^{(n)}(x, y) = (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \sum_{i+j=0}^n \beta_{ij} x^i y^j. \quad /4/$$

Система рівнянь для визначення β_{ij} , згідно [1], матиме вигляд

$$\beta_{ij} [a^2(j+1)(j+2) + b^2(i+1)(i+2)] + \beta_{i-2, j+2} b^2(j+2)(j+1) + \beta_{i+2, j-2} a^2(i+2)(i+1) - a^2 b^2 [(i+2)(i+1)\beta_{i+2, j} + (j+2)(j+1)\beta_{i, j+2}] = \alpha_{ij}. \quad /5/$$

Причому $\beta_{\ell k} = 0$, якщо $n < \ell < 0 \vee n < k < 0 \vee \ell + k > n$

Вкажемо вигляд матриці системи /5/ для деяких значень n

$$n = 0$$

$$A = [2a^2 + b^2]$$

$$n = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2a^2 + 6b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6a^2 + 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 + 2b^2 \end{bmatrix}$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 12b^2 + 2a^2 & 0 & 2b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6a^2 + b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 12a^2 + 2b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6b^2 + 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b^2 + 6a^2 & 0 \\ -2a^2 b^2 & 0 & -2a^2 b^2 & 0 & 0 & 2a^2 + 2b^2 \end{bmatrix}.$$

Якщо позначити m - розмірність матриці /5/, n - степінь многочлена правої частини /1/, то

$$m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad /6/$$

звідки видно, що навіть при невеликих n рівномірність системи досить велика.

На мові Фортран-IV складена підпрограма

SUBROUTINE PUASS (K, C, D, IV),

яка обчислює вектор $\{REZ\}_i$ - значення розв'язків задачі /1/ - /2/ в точках $(x_i, y_i), i=1, NXV$, коли правою частиною рівняння є багато-член степеня $K (K \leq 15)$, а кривою S - еліпс з півосями C, D , розміщений у початку координат.

Масиви $\{a_{ij}\}_{i,j=0, \overline{K}}, \{x_i\}_{i=1, \overline{NXV}}, \{y_i\}_{i=1, \overline{NXV}}$ замовник повинен сформувати в основній програмі і описати оператором

COMMON /PUAS/ AK(240), X(500), Y(500), REZ(500), NXV

IV - параметр виводу на друк інформації про роботу PUASS.

IV = 1 - видруковується повна інформація про роботу PUASS, IV = 2 - друку немає.

Розв'язок системи обчислює *SUBROUTINE GEL 6* методом Гауса з вибором головного елемента. При $C = D$, очевидно, буде розв'язуватись задача для кола радіуса C . Отриманий результат можна легко поширити на тривимірний випадок. Для прикладу розглянемо задачу

$$\Delta U(x, y) = 2x^2 + xy - 2y^2 - x + 3y - 5, \quad /7/$$

$$U(x, y)|_S = 0, \quad /8/$$

де S - еліпс з півосями $C = 2, D = 1$.

Для роботи підпрограми PUASS в основній програмі сформовано:

- масив AK /2., 1, -2, -1, 3, -5 /;
- масив X;
- масив Y;
- константа NXV = 12.

Виваємо розв'язок системи /коефіцієнти β_{ij} /, а також значення розв'язку задачі /7/ - /8/ у точках площини обчислені програмою PUASS /2., 2., 1., 1 /. Значення β_{ij} /0.1057, 0.033, -0.057, -0.07, 0.1154, -0.462/. Розв'язок у точках площини:

X	Y	REZ	X	Y	REZ
-2.000	0.0	0.0	0.181	0.0	1.866
-1.636	0.0	0.081	0.545	0.0	1.734
-1.272	0.0	0.473	0.909	0.0	1.391

X	Y	REZ	X	Y	REZ
-0.909	0.0	0.979	1.272	0.0	0.906
-0.545	0.0	1.446	1.636	0.0	0.389
-0.181	0.0	1.763	2.000	0.0	0.0

Список літератури: І. Бакалець В.А., Людкевич Й.В. Метод неозначених коефіцієнтів розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 15, 1979.

УДК 532. 582

Д.В.Гриліцький, В.Я.Онищук

НЕСТАЦІОНАРНА ВЗАЄМОДІЯ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З АКУСТИЧНОЮ ХВИЛЕЮ ТИСКУ

І. Розглянемо тонку пружну сферичну оболонку, яка описується рівняннями лінійної теорії оболонок типу Тимошенка, заповнену всередині акустичним середовищем з параметрами ρ_3 і C_3 /рис. 1/.

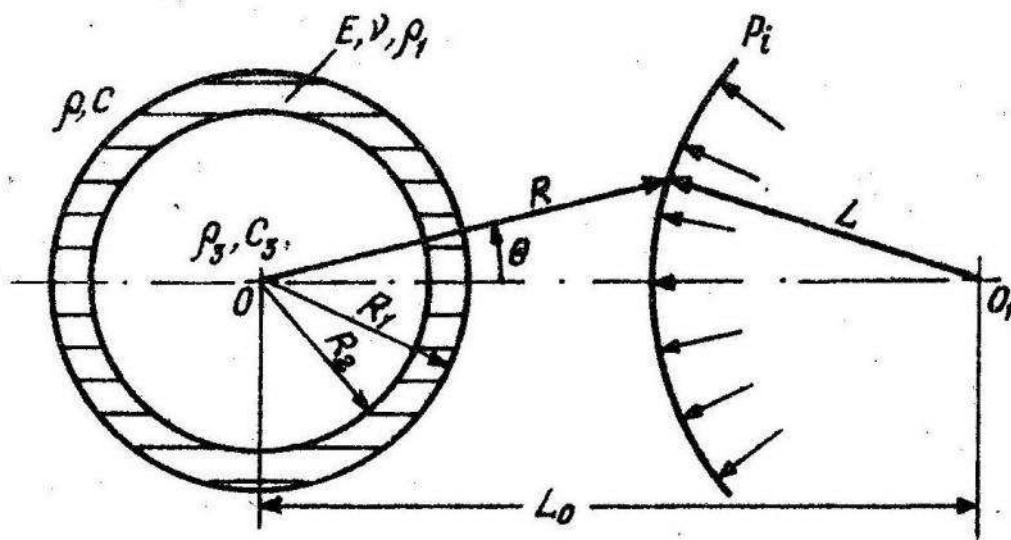


Рис. 1.

Оболонка занурена в безмежну ідеальну стисливу рідину з параметрами ρ , C і знаходиться під дією сферичної хвилі тиску скінченної

тривалості [1]

$$p_i = p_0 \frac{\ell_0}{\ell} f(\tau - \ell) [H(\tau - \ell) - H(\tau - \ell - \tau_0)] \quad /1.1/$$

Рівняння руху оболонки у переміщеннях при осевій симетрії в безрозмірних координатах мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} L_{11} U + L_{12} \psi + L_{13} W &= 0, \\ L_{21} U + L_{22} \psi + L_{23} W &= 0, \\ L_{31} U + L_{32} \psi + L_{33} W + Q &= 0, \end{aligned} \quad /1.2/$$

де

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu - \chi^2 - (1 + \alpha^2) \lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \\ L_{12} &= z_0 (\chi^2 - 2\alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}); \quad L_{13} = (1 + \nu + \chi^2) \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ L_{21} &= \chi^2 - 2\alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \\ L_{22} &= z_0 [\alpha^2 (\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu) - \chi^2 - \alpha^2 \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}]; \quad /1.3/ \\ L_{23} &= -\chi^2 \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad L_{31} = -(1 + \nu + \chi^2) (\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta); \\ L_{32} &= z_0 \chi^2 (\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta); \\ L_{33} &= \chi^2 (\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) - 2(1 + \nu) - (1 + \alpha^2) \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \end{aligned}$$

У формулах /1.1/ - /1.3/ введіть такі позначення:

$$\begin{aligned} \ell &= L/R_1; \quad \ell_0 = L_0/R_1; \quad z = R/R_1; \quad \tau = Ct/R_1; \\ \tau_0 &= Ct_0/R_1; \quad z_0 = R_0/R_1; \quad Q = q/(\alpha \rho C^2); \quad z_2 = R_2/R_1; \\ \alpha &= hR_1 C_{10} \rho_1 / (R_0^2 \rho C^2); \quad \lambda_0 = z_0 \beta_0; \quad \beta_0 = C_{10}/C; \\ C_{10} &= E/(\rho_1 (1 - \nu^2)); \quad \alpha^2 = h^2/(12R_0^2); \quad \chi^2 = (1 - \nu)k_T^2/2; \\ k_T^2 &= 5/6; \quad u = U/R_1; \quad w = W/R_1; \end{aligned}$$

L - довжина радіус-вектора, проведеного в центр джерела хвилі;
 L_0 - відстань від центра джерела до центра оболонки; p_i - тиск у падачій хвилі; p_0 - постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ - довільна функція, яка визначає закон зміни тиску в падачій хвилі;
 $H(\tau)$ - одинична функція Хевісайда; ℓ_0 - тривалість імпульсу; R, θ - сферичні координати; R_1, R_2 - радіуси зовнішньої і відповідно внутрішньої поверхні оболонки; R_0 - радіус середньої поверхні оболонки;
 h - товщина оболонки; ρ, C - густина рідини та швидкість звуку в рідині; E, ν, ρ_1 - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і густина матеріа-

ду оболонки; ρ, C_3 - густина заповнювача і швидкість звуку в заповнювачі; k_r^2 - коефіцієнт зсуву; q - радіальний компонент зовнішнього навантаження на одиницю площі поверхні оболонки; C_{10} - швидкість поширення хвиль в оболонці; U, W - тангенціальне та радіальне переміщення серединної оболонки; ψ - кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки.

Потенціал переміщень Φ для акустичного середовища, в яке занурена сферична оболонка, задовольняє хвильовому рівнянню

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \quad /I.4/$$

де ∇^2 - оператор Лапласа.

Вектор переміщення $\vec{U}_e$ і тиск p_e в середовищі визначаються за формулами

$$\vec{U}_e = \text{grad } \Phi, \quad p_e = -\rho C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}. \quad /I.5/$$

Рух заповнювача описується хвильовим рівнянням

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad \beta_3 = C_3 / C, \quad /I.6/$$

де ψ - потенціал переміщень для заповнювача, через який переміщення $\vec{U}_3$ і тиск p_3 у заповнювачі визначаються з формул

$$\vec{U}_3 = \text{grad } \psi, \quad p_3 = -\rho C^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}. \quad /I.7/$$

Задача визначення нестационарних переміщень серединної поверхні оболонки полягає у сумісному інтегруванні рівнянь /I.2, /I.4/ і /I.6/ при таких умовах:

а/ початкові умови нульові;

б/ умова випромінювання при $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi = 0; \quad /I.8/$$

в/ умови контакту

$$q = -p_i / z_{=1} - p_e / z_{=1} + p_3 / z_2 = z_2, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{\rho C^2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) \quad \text{при } z=1, \quad /I.9/$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = - \frac{1}{\rho_3 c^2} \frac{\partial P_3}{\partial z} \quad \text{при } z = z_2;$$

г/ умова обмеженості розв'язку.

2. Для знаходження розв'язку поставленої задачі застосуємо інтегральне перетворення Фур'є по часу. Зображення падаючої хвилі /індекс F / у вигляді безмежного ряду запишемо як

$$P_1^F = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\omega) j_n(\omega z) P_n(\cos \theta), \quad /2.1/$$

де $g_n(\omega) = i\omega l_0 f^F(\omega) (2n+1) h_n(\omega l_0)$; ω - параметр перетворення Фур'є; $f^F(\omega)$ - зображення Фур'є від функції $f(\tau)$;

$h_n(\omega) = j_n(\omega) + i n_n(\omega)$ - сферична функція Ханкеля першого роду;
 $j_n(\omega)$ і $n_n(\omega)$ - сферичні функції Бесселя і Неймана; $P_n(\cos \theta)$ - поліноми Лежандра.

Зображення розв'язків системи /1.2/, хвильових рівнянь /1.4/ і /1.6/ шукаємо у вигляді безмежних рядів

$$\begin{aligned} U^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\omega) g_n(\omega) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \\ \Psi^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\omega) g_n(\omega) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad /2.2/$$

$$\begin{aligned} W^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\omega) g_n(\omega) P_n(\cos \theta), \\ \Phi^F &= \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\omega) g_n(\omega) h_n(\omega z) P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad /2.3/$$

$$\Psi^F = \frac{1+\nu}{E} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\omega) g_n(\omega) j_n(\omega_3 z) P_n(\cos \theta), \quad /2.4/$$

де $u_n, \psi_n, w_n, x_n, y_n$ - невідомі коефіцієнти; $\omega_3 = \omega/\beta_3$.

Зображення розв'язків /2.2/ - /2.4/ обмежені в областях, де вони визначені, а розв'язок /2.3/, крім того, задовольняє зображення умови випромінювання /1.8/.

Підставляючи розклади /2.2/ - /2.4/ у зображення системи диференціальних рівнянь руху /1.2/ і граничні умови /1.9/, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів W_n

$$\begin{aligned} \alpha_{11} u_n + \alpha_{12} \psi_n + \alpha_{13} w_n &= 0, \\ \alpha_{21} u_n + \alpha_{22} \psi_n + \alpha_{23} w_n &= 0, \end{aligned} \quad /2.5/$$

$$\alpha_{31} U_n + \alpha_{32} V_n + \alpha_{33} W_n + \alpha_{34} X_n + \alpha_{35} Y_n = \alpha_{30},$$

$$\alpha_{43} W_n + \alpha_{44} X_n = \alpha_{40},$$

$$\alpha_{53} W_n + \alpha_{55} Y_n = 0,$$

де

$$\alpha_{11} = -n(n+1) + (1-\nu - \mathcal{X}^2) + (1+\alpha^2)\omega_0^2;$$

$$\alpha_{12} = \tau_0 (\mathcal{X}^2 + 2\alpha^2\omega_0^2); \alpha_{13} = 1+\nu + \mathcal{X}^2; \alpha_{21} = \mathcal{X}^2 + 2\alpha^2\omega_0^2;$$

$$\alpha_{22} = \tau_0 \{ \alpha^2 [-n(n+1) + 1 - \nu + \omega_0^2] - \mathcal{X}^2 \}; \alpha_{23} = -\mathcal{X}^2;$$

$$\alpha_{31} = (1+\nu + \mathcal{X}^2)n(n+1); \alpha_{32} = -\tau_0 \mathcal{X}^2 n(n+1);$$

$$\alpha_{33} = -\mathcal{X}^2 n(n+1) - 2(1+\nu) + (1+\alpha^2)\omega_0^2; \alpha_{34} = -\frac{\omega^2}{\alpha} h_n(\omega);$$

$$\alpha_{35} = \frac{\omega^2}{\alpha} \frac{\rho_3}{\rho} j_n(\omega_3 z_2); \alpha_{30} = \frac{E}{\alpha(1+\nu)\rho C^2} j_n(\omega); \alpha_{43} = 1;$$

$$\alpha_{44} = -\omega h_n(\omega); \alpha_{40} = \frac{E}{\alpha(1+\nu)\rho C^2} j_n(\omega); \alpha_{53} = 1;$$

$$\alpha_{55} = -\omega_3 j_n(\omega_3 z_2); \omega_0 = \mathcal{X}_0 \omega.$$

Штрих означає похідну по аргументу.

Розв'язавши систему /2.5/ відносно W_n , знайдемо

$$W_n(\omega) = \frac{E}{(1+\nu)\rho C^2 \omega^2} [W_{1n}(\omega) + i W_{2n}(\omega)], \quad /2.6/$$

де

$$W_{1n}(\omega) = -Y D_2 / (X^2 + Y^2); \quad W_{2n}(\omega) = -X D_2 / (X^2 + Y^2);$$

$$X = \omega j_n(\omega) D_2 - (\alpha D_1 + \frac{\omega^2 \rho_3}{\omega_3 \rho} \frac{j_n(\omega_3 z_2)}{j_n(\omega_3 z_2)} D_2) j_n'(\omega);$$

$$Y = \omega n_n(\omega) D_2 - (\alpha D_1 + \frac{\omega^2 \rho_3}{\omega_3 \rho} \frac{j_n(\omega_3 z_2)}{j_n(\omega_3 z_2)} D_2) n_n'(\omega);$$

$$D_1 = \det |\alpha_{ij}| (i, j = 1, 2, 3); \quad D_2 = \det |\alpha_{ij}| (i, j = 1, 2). \quad /2.7/$$

Переміщення серединної поверхні оболонки у просторі оригіналів знаходимо за формулою

$$\frac{\rho C^2}{\rho_0} W = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{1n} + i W_{2n}}{\omega^2} g_n(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right\} P_n(\cos\theta).$$

3. Числові розрахунки проводили для тонкої сферичної оболонки $E = 7,220 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu = 0,31$, $\rho_1 = 0,264$ г/см³, $h/R_0 = 7,88 \cdot 10^{-3}$, що занурена в воду $\rho = 1,0$ г/см³, $C = 1410$ м/с з параметрами заповнювача $\rho_3 = \rho$, $C_3 = C$. Закон зміни тиску в падаючій хвилі приймали синусоїдальним $f(\tau) = \sin \omega_0 \tau$, де ω_0 - частота заповнення, а фронт хвилі вважали плоским, тобто

$$g_n(\omega) = f(\omega) (2n+1) i^{-n} \exp(i\omega l_0).$$

Обчислення інтегралу /2.7/ проводили методом числового інтегрування Ромберга [3]. Оптимальні границі та крок інтегрування вибирали за допомогою БМ "ЕС-1022".

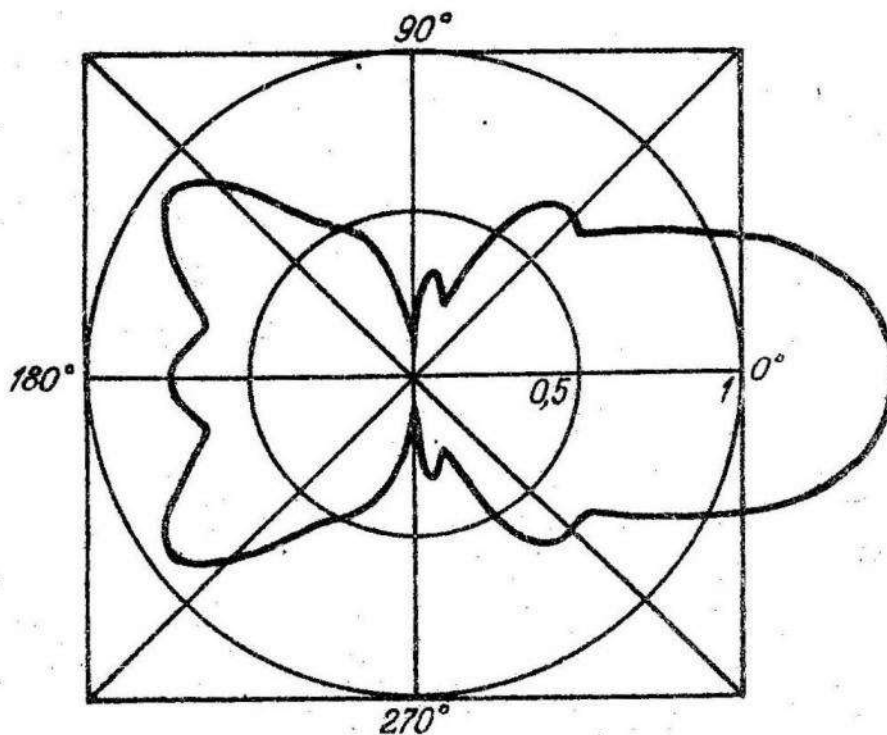


Рис. 2.

На рис. 2 показана діаграма стаціонарних переміщень $(\rho C^2 / \rho_0) W \cdot 10^4$ залежно від кута θ для частоти заповнення $\omega_0 = 9,3$.

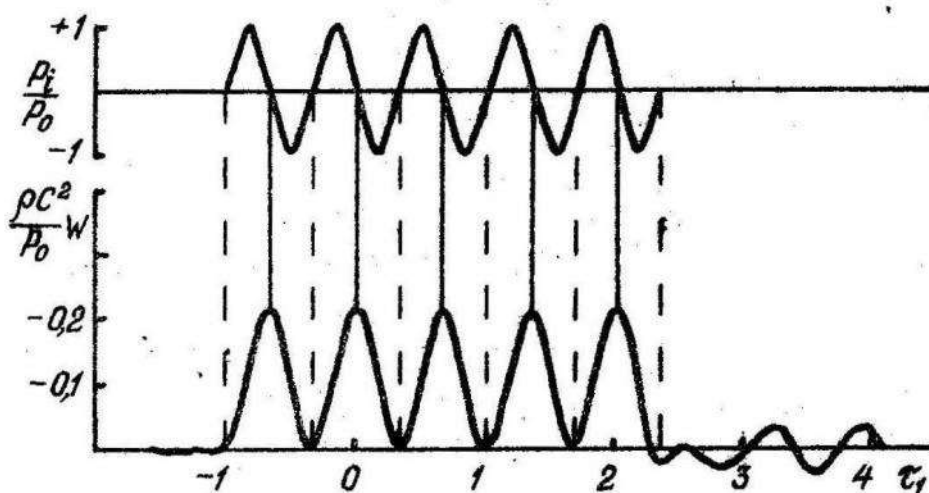


Рис. 3.

На рис. 3 зображені нестационарні переміщення $(\rho C^2 / \rho_0) W$ залежно від безрозмірного часу $\tau_1 = \tau - \ell_0$ для частоти заповнення $\omega_0 = 9,3$, кута $\theta = 0$ і тривалості імпульсу, який дорівнює п'яти періодам синусоїди $/ \tau_0 = 3,37805/$. У верхній частині рисунку показаний падаючий імпульс.

Список літератури: 1. Н и г у л У.К. и др. Эхо-сигналы от упругих объектов. - Таллин, 1974. 2. Prasad C. On vibrations of spherical shells. - J. Acoustical Society of America, 1964, vol. 36, No. 3. 3. Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S. New aspects in numerical quadrature. - Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.

УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Б.Г.Шелестовський
КВАЗІСТАЦІОНАРНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Розглянемо плоскопаралельний шар скінченної товщини h , поверхні якого вільні від зовнішнього навантаження. На верхній площині шару в крузі радіуса a задана температура T_0 , яка рухається з постійною швидкістю V в напрямі осі ξ_1 прямокутної системи

координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 /рис. I/. Зовні рухомого круга і на нижній площині шару $z=h$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона. Визначимо величину та характер розподілу температурного поля і температурних напружень у плоскопаралельному шарі.

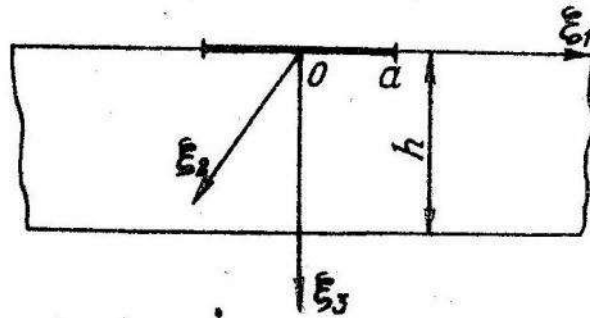


Рис. I.

Рівняння теплопровідності має вигляд [1]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) T = 0, \quad /1/$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{c\rho};$$

λ - коефіцієнт теплопровідності; c - питома теплоємність; ρ - густина.

Спрощення задачі одержимо за умови застосування рухомої системи координат x, y, z , яка зв'язана з рухомих температурним штапом так, що початок координат поміщено у центрі круга радіуса a . Прий-
мемо цю систему паралельною системі ξ_1, ξ_2, ξ_3 , тоді залежності між координатами обох систем

$$\xi_1 = Vt + x, \quad \xi_2 = y, \quad \xi_3 = z.$$

Рівняння теплопровідності /1/ та граничні умови у рухомій сис-
темі координат наберуть вигляду

$$\left(\nabla^2 + 2M \frac{\partial}{\partial x} \right) T = 0, \quad 2M = \frac{V}{\alpha}, \quad /2/$$

$$T = T_0, 0 \leq z < a, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa T, \quad z > a, \quad z = 0. \quad /3/$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\kappa_1 T, \quad z = h, \quad 0 < z < \infty. \quad /4/$$

Розв'язок рівняння /2/ шукаємо як

$$T(x, y, z) = e^{-\mu x} F(x, y, z). \quad /5/$$

Підставивши /5/ в /2/, одержимо

$$\nabla^2 F - \mu^2 F = 0. \quad /6/$$

Зобразимо функцію F у вигляді розкладу в ряд Фур'є по кутовій координаті φ , враховуючи, що F - парна функція

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r, z) \cos n\varphi. \quad /7/$$

Скористаємось циліндричною системою координат r, φ, z

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Підставивши /7/ у рівняння /6/, матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial F_n}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial r^2} - \left(\mu^2 + \frac{n^2}{z^2} \right) F_n \right] \cos n\varphi = 0. \quad /8/$$

Застосувавши до співвідношення /8/ інтегральне перетворення Ханкеля, використавши його властивості та теорему обернення, знайдемо

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} p [A_n(p) \operatorname{sh} \beta z + B_n(p) \operatorname{ch} \beta z] J_n(pr) dp, \quad /9/$$

$$\beta = \sqrt{p^2 + \mu^2},$$

де $J_n(pr)$ - функція Бесселя першого роду.

Задовольняючи граничні умови /4/ і /3/, одержуємо

$$B_n = -H(p) A_n(p), \quad H(p) = \frac{\beta + \kappa_1 \operatorname{th} \beta h}{\beta \operatorname{th} \beta h + \kappa_1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} p A_n(p) J_n(pr) dp = -T_0 e^{\mu z \cos \varphi} \quad /10/$$

$$0 \leq z < a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} \frac{p A_n(p)}{1 - g(p)} J_n(pr) dp = 0, \quad z > a,$$

де введені позначення

$$\rho H(\rho) A_n(\rho) = \Phi_n(\rho); \quad 1 - g(\rho) = \frac{\rho H(\rho)}{\beta + \kappa H(\rho)}. \quad /11/$$

Розкладемо $e^{\mu z \cos \varphi}$ у ряд Фур'є

$$e^{\mu z \cos \varphi} = I_0(\mu z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mu z) \cos n\varphi, \quad /12/$$

де $I_n(\mu z)$ - модифікована функція Бесселя.

Прирівнюючи члени при $\cos n\varphi$ у співвідношенні /10/, з врахуванням /12/ маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi_n(\rho) J_n(\rho z) d\rho &= \omega(z), \quad 0 \leq z < a; \\ \int_0^{\infty} \frac{\rho \Phi(\rho)}{1 - g(\rho)} J_n(\rho z) d\rho &= 0, \quad z > a, \end{aligned} \quad /13/$$

$$\omega(z) = -2\gamma_n I_n(\mu z), \quad \gamma_n = \begin{cases} \frac{1}{2} T_0, & n=0, \\ T_0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Позначивши

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_n(\lambda)}{1 - g(\lambda)} &= f_n(\lambda), \\ f_n(\lambda) &= \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \int_0^a t^{1/2} \varphi_n(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt, \end{aligned} \quad /14/$$

наші інтегральні рівняння /13/ зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно функції $\varphi_n(t)$ [2]

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \left[\psi_n(t) + \frac{1}{2} \int_0^a M_n(x, t) \varphi_n(x) dx \right], \quad /15/$$

ядро і вільний член якого мають вигляд

$$\begin{aligned} M_n(x, t) &= \pi \sqrt{xt} \int_0^{\infty} \lambda g(\lambda) J_{n-1/2}(\lambda x) J_{n-1/2}(\lambda t) d\lambda, \\ t^n \psi_n(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} [x^n \omega(x)] + nt^n \int_0^{\pi/2} \omega_n(t \sin \theta) \sin^{n-1} \theta d\theta + \\ &+ t^{n+1} \int_0^{\pi/2} \omega'_n(t \sin \theta) \sin^n \theta d\theta. \end{aligned} \quad /16/ \quad /17/$$

Відзначимо, що у випадку, коли нагріта область рухається по поверхні півпростору, а зовні нагрітої області підтримується нульова

температура, розв'язок рівняння теплопровідності має вигляд

$$T = 2e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \int_0^{\infty} \rho \frac{\mu I_{n-1}(\mu a) J_n(\rho a) - \rho I_n(\mu a) J_{n-1}(\rho a)}{\mu^2 + \rho^2} \times \\ \times J_n(\rho z) e^{-\sqrt{\rho^2 + \mu^2} z} d\rho \cdot \cos n\varphi. \quad /18/$$

Визначення квазістаціонарного розподілу напружень у плоскому випадку, зумовленого рухом розривного температурного поля, присвячена праця [3].

Для знаходження квазістаціонарних температурних напружень скористаємось термопружним потенціалом переміщень, який задовольняє рівняння [1]

$$\nabla^2 \Phi = mT, \quad m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha, \quad /19/$$

де α - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Підставивши замість T в /2/ його вираз з /19/, одержимо

$$T + \frac{2\mu}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

звідки

$$\Phi = -\frac{m}{2\mu} \int_{-\infty}^x T(x, y, z) dx \quad /20/$$

Поверхні шару вільні від зовнішнього навантаження, тому задоволення граничних умов $\sigma_{zz} = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0, z = 0, z = h$

приводить до розв'язання першої основної задачі теорії пружності для шару.

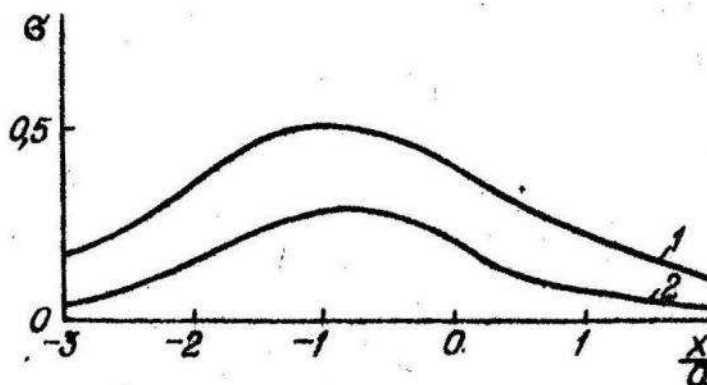


Рис. 2.

Інтегральні рівняння /15/ розв'язували зведенням до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи квадратурну формулу Гауса. На рис. 2 показано графік розподілу напружень σ_{xx} . При цьому

$$\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\sigma_{xx}}{2\sigma_0 T_0}; \quad \mu a = 1, \quad \frac{h}{a} = 1, \quad ka = 0.5, \quad \kappa a = 1.$$

Крива 1 - σ при $z = 0$, крива 2 - при $\frac{z}{h} = 0.5$.

Список літератури: 1. Н о в а ц к и й В. Вопросы термоупругости. - М.: Изд-во АН СССР, 1962. 2. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 3. Я х а н ш а х и А. Квазистатическое распределение напряжений, обусловленное движущимся по плоской границе разрывным распределением температуры. - Прикладная механика. ТАОИМ, 1966, № 4.

УДК 533.6.013.42

В.Я.Онищук

АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ ВІД СУЦІЛЬНОЇ ПРУЖНОЇ СФЕРИ

1. Розглянемо суцільну пружну сферу, занурену в безмежну ідеальну стисливу рідину, на яку діє зосереджений силовий імпульс скінченної тривалості $0 \leq \tau \leq \tau_0$, прикладений у точці з координатами $/1, \theta_0, \varphi_0/$, причому

$$p_i = p_0 f(\tau) \frac{\delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{\sin \theta} [H(\tau) - H(\tau - \tau_0)], \quad /1.1/$$

$\tau = Ct/R_1, \quad \tau_0 = Ct_0/R_1.$

У формулі /1.1/ і далі p_i - тиск, викликаний зосередженим імпульсом; p_0 - постійна, яка має розмірність тиску; $f(\tau)$ - функція, що визначає закон зміни тиску в імпульсі; $H(\tau)$ - одинична функція Хевісайда; $\delta(\theta)$ - функція Дірака; R, θ, φ - сферичні координати; t - час; t_0 - тривалість імпульсу; R_1 - радіус сфери; E, ν, ρ_1 - модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу сфери; ρ, C - густина рідини і швидкість звуку в рідині; $\sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{z\varphi}$ - компоненти тензора напруження у сфері. Всі лінійні величини віднесені до радіуса сфери.

Потенціал переміщень Φ для акустичного середовища, яке оточує сферу, задовольняє хвильове рівняння

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \quad /1.2/$$

де ∇^2 - оператор Лапласа.

Вектор переміщення $\vec{u}_e(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ і тиск p_e в акустичному середовищі через потенціал Φ визначають за формулами

$$\vec{u}_e = \text{grad } \Phi, \quad p_e = -\rho c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}. \quad /1.3/$$

Якщо вектор пружного переміщення $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ для сфери записати у вигляді

$$\vec{u} = \text{grad } k + \text{rot } \vec{\psi}, \quad \text{div } \vec{\psi} = 0, \quad /1.4/$$

то рівняння руху можна записати у вигляді двох незалежних хвильових рівнянь

$$\nabla^2 k = \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2}, \quad \nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial \tau^2}, \quad /1.5/$$

де $\beta_1 = C_1/c$, $\beta_2 = C_2/c$, C_1 і C_2 - швидкості поширення хвиль розширення і хвиль зсуву в сфері.

Задача знаходження випроміненого нестационарного звукового поля полягає в сумісному інтегруванні хвильових рівнянь /1.2/ і /1.5/ при таких умовах:

а/ початкові умови нульові;

б/ умова випромінювання при $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi = 0, \quad z = R/R_1; \quad /1.6/$$

в/ умови контакту на поверхні сфери /при $z = 1$ /

$$\sigma_{rz} + p_e + p_i = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0, \quad u_r - u_{er} = 0. \quad /1.7/$$

Припускаємо, що розглядувані функції набувають скінченних значень в областях, де вони визначені.

2. Для знаходження розв'язку поставленої задачі застосуємо інтегральне перетворення Фур'є по часу і, розклавши дельта-функцію в ряд по тессеральних сферичних функціях, зобразимо зосереджений

імпульс /1.1/ у вигляді

$$\rho_i^F = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \rho_n^m(\cos \theta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi], \quad /2.1/$$

де $a_{nm} = f^F(\omega) A_{nm}$, $b_{nm} = f^F(\omega) B_{nm}$, ω - параметр перетворення Фур'є;
 $f^F(\omega)$ - зображення Фур'є від $f(\tau)[H(\tau) - H(\tau - \tau_0)]$; A_{nm} і B_{nm} -
 коефіцієнти розкладу дельта-функції в ряд по тессеральних функціях.

Застосування перетворення Фур'є до хвильових рівнянь /1.2/,
 /1.5/ і умови випромінювання /1.6/ дає

$$(\nabla^2 + \omega^2) \Phi^F = 0, \quad /2.2/$$

$$(\nabla^2 + \omega_1^2) k^F = 0, \quad \omega_1 = \omega / \beta_1, \quad /2.3/$$

$$(\nabla^2 + \omega_2^2) \vec{\psi}^F = 0, \quad \omega_2 = \omega / \beta_2, \quad /2.4/$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\omega \right) \Phi^F = 0. \quad /2.5/$$

Розв'язок рівняння /2.2/, який задовольняє умову /2.5/, шукаємо
 у вигляді безмежного ряду

$$\frac{E}{1+\nu} \Phi^F = \rho \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega z) x_n(\omega) \sum_{m=0}^n \rho_n^m(\cos \theta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi], \quad /2.6/$$

де $h_n(\omega z)$ - сферична функція Ханкеля першого роду; $x_n(\omega)$ - шукані
 коефіцієнти.

Розв'язок векторного хвильового рівняння /2.4/ запишемо у вигляді [1]

$$\vec{\psi}^F = \text{rot}(\vec{i}_z \chi_2) + \text{rot rot}(\vec{i}_z \chi_1), \quad /2.7/$$

де $\vec{i}_z$ - одиничний вектор у радіальному напрямі.

Кожна зі скалярних функцій χ_j , $j = 1, 2$ задовольняє одне і те
 ж хвильове рівняння

$$(\nabla^2 + \omega_2^2) \chi = 0. \quad /2.8/$$

Загальні розв'язки рівнянь /2.3/ і /2.8/, обмежені при $z \rightarrow 0$,
 в координатах z, θ, φ шукаємо у вигляді безмежних рядів

$$\frac{E}{1+\nu} k^F = \rho \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\omega, z) \sum_{m=0}^n \rho_n^m(\cos \theta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi], \quad /2.9/$$

$$\frac{E}{1+\nu} \chi = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\omega_2 r) \sum_{m=0}^n \rho_n^m(\cos \theta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi], \quad /2.10/$$

де $z_n(\omega_i r) = C_{in} j_n(\omega_i r)$; $j_n(\omega_i r)$ - сферична функція Бесселя; C_{in} - довільні сталі.

Компоненти вектора пружного переміщення у просторі зображень Фур'є через розв'язки /2.9/ і /2.10/ визначаються за формулою

$$\vec{u}^F = a_1 \text{grad } k^F + a_2 \text{rot}(\vec{i}_2 r \chi_1) + a_3 \text{rot rot}(\vec{i}_2 r \chi_2), \quad /2.11/$$

де a_1, a_2, a_3 - довільні сталі.

Використовуючи співвідношення деформації-переміщення і напруження-деформації та задовольняючи перетворені по Фур'є умови контакту /1.7/, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження безрозмірних невідомих комплексних коефіцієнтів $x_n(\omega)$ для кожного члена ряду /2.6/

$$\begin{aligned} \alpha_{11} a_n + \alpha_{12} b_n + (\alpha_{13} + i\beta_{13}) x_n &= \alpha_{10}, \\ \alpha_{21} a_n + \alpha_{22} b_n + (\alpha_{23} + i\beta_{23}) x_n &= 0, \\ \alpha_{31} a_n + \alpha_{32} b_n &= 0, \end{aligned} \quad /2.12/$$

де коефіцієнти α_{ij} і β_{ij} визначаються згідно з формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \omega_1^2 \left[\frac{\nu}{1-2\nu} j_n(\omega_1) - j_n''(\omega_1) \right], \quad \alpha_{12} = n(n+1) \left[j_n(\omega_2) - \omega_2 j_n'(\omega_2) \right], \\ \alpha_{13} &= -\frac{\rho C^2(1+\nu)}{E} \omega_1^2 j_n(\omega_1), \quad \beta_{13} = -\frac{\rho C^2(1+\nu)}{E} \omega_1^2 n_n(\omega_1), \\ \alpha_{10} &= 1, \quad \alpha_{21} = \omega_1 j_n'(\omega_1), \quad \alpha_{22} = n(n+1) j_n(\omega_2), \\ \alpha_{23} &= -\omega j_n'(\omega), \quad \beta_{23} = -\omega n_n(\omega), \\ \alpha_{31} &= 2[j_n(\omega_1) - \omega_1 j_n'(\omega_1)], \quad \alpha_{32} = -\omega_2^2 j_n''(\omega_2) - (n^2 + n - 2) j_n'(\omega_2); \end{aligned} \quad /2.13/$$

$$a_n = a_1 C_{1n}, \quad b_n = a_3 C_{2n}, \quad n_n(\omega) -$$

сферична функція Неймана /штрих означає похідну по аргументу/.

Розв'язок системи /2.12/ можна записати у вигляді

$$x_{1n} = \frac{1}{\Delta} (\alpha_{23} - x_n \alpha_{13}) x_n \alpha_{10}, \quad x_{2n} = -\frac{1}{\Delta} (\beta_{23} - x_n \beta_{13}) x_n \alpha_{10}, \quad /2.14/$$

$$\text{де } x_n = x_{1n} + i x_{2n}, \quad \Delta = (\alpha_{23} - x_n \alpha_{13})^2 + (\beta_{23} - x_n \beta_{13})^2,$$

$$x_n = (\alpha_{22} \alpha_{31} - \alpha_{21} \alpha_{32}) / (\alpha_{12} \alpha_{31} - \alpha_{11} \alpha_{32}).$$

Якщо записати зображення тиску в випроміненому полі у вигляді

$$p_e^F = p_0 f^F(\omega) F^F(\omega), \quad /2.15/$$

де

$$F^F(\omega) = p c^2 \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega z) x_n(\omega) \sum_{m=0}^n p_n^m(\cos \theta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi] - \text{одиничне стаціонарне поле від сфери, то перехід в область оригіналів здійснюється за формулою}$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\omega) F^F(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega. \quad /2.16/$$

3. Обчислення інтегралу /2.16/ проводили методом числового інтегрування Ромберга [2]. Закон зміни тиску в зосередженому імпульсі приймався за синусоїду, тобто

$$f(\tau) = \sin \omega_0 \tau, \quad /3.1/$$

де ω_0 - частота синусоїдального заповнення.

Числові розрахунки звукового поля проводили в дальньому полі $|z| \gg 1$ на осі дії зосередженого силового імпульсу $\theta = 0$, причому ця вісь збігалась з віссю z декартової системи координат $\theta_0 = 0$. Програма складена на мові ФОРТРАН-IV і реалізована на ЕОМ ЕС-1022.

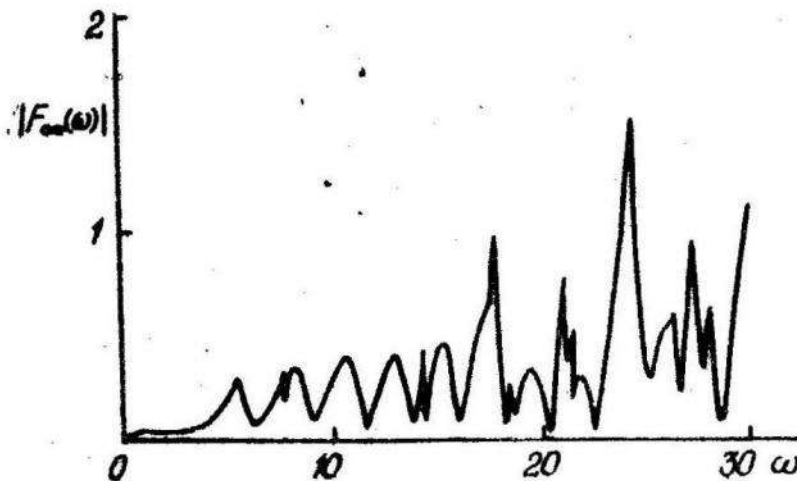


Рис. I.

На рис. I-3 показані графіки випроміненого поля від алюмінієвої сфери $E = 6,76 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,355$, $\rho_1 = 27 \text{ г/см}^3$ / в воді $\rho = 1,02 \text{ г/см}^3$, $C = 1410 \text{ м/с}$ /.

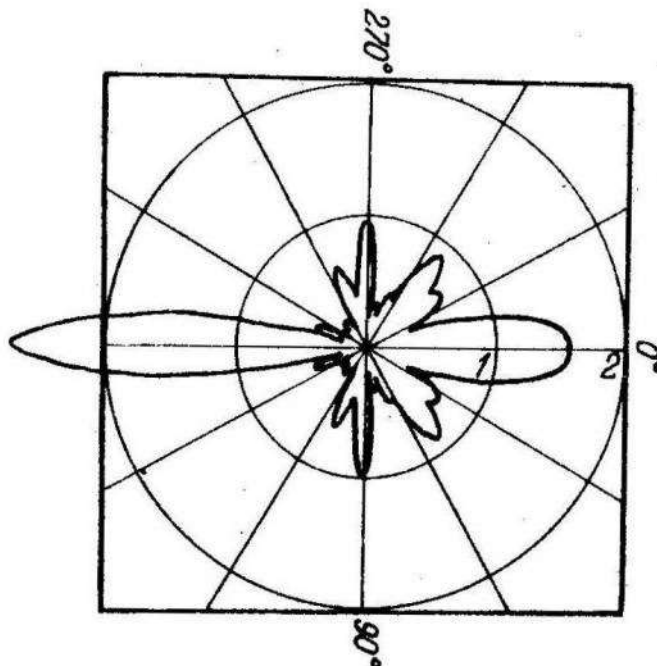


Рис. 2.

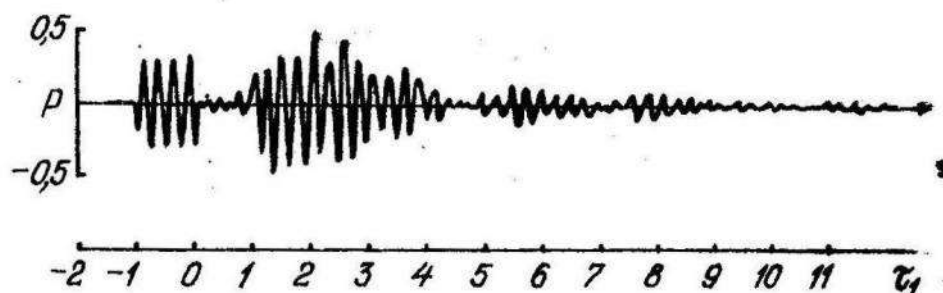


Рис. 3.

На рис. 1 зображена амплітуда стаціонарного звукового поля $F(\omega) = zF^F(\omega)$ залежно від безрозмірної частоти $\omega = \Omega R_1/c$, де Ω - кругова частота імпульсу.

На рис. 2 показана діаграма стаціонарного звукового поля залежно від кута θ для частоти $\omega = 24,3$, яка відповідає максимуму амплітуди стаціонарного поля /рис.1/.

На рис. 3 зображено нестационарне звукове поле $p = \rho_0 / \rho_0$ залежно від безрозмірного часу $\tau_1 = \tau - \tau_0$ для частоти $\omega_0 = 24,3$ і тривалості імпульсу $\tau_0 = 1,0$.

Список літератури: І. Морз Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т.2. - М.: ИЛ, 1952. 2. *Bauer F. L., Rutishauser H., Stiefel S. New aspects in numerical quadrature - Pros. Sympos. Appl. Math., 1963, vol. 15.*

УДК 533.6.013.42

Р.І.Мокрик, Ю.О.Пир'єв

ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА АКУСТИЧНОМУ ПІВПРОСТОРІ

Кожна система середовищ характеризується своїм дисперсійним співвідношенням, яке має важливе значення при розв'язуванні й аналізі стаціонарних і нестаціонарних задач для даної системи середовищ. Наставою аналіз властивостей дисперсійних рівнянь проводився в працях [1-7].

Ми розглядаємо дисперсійне рівняння для пружного шару товщиною H , що лежить на рідкому акустичному півпросторі, яке має вигляд

$$\Delta(u, x) = \lambda A(u, x, h, \tau_2) + \alpha B(u, x, h, \tau_2) = 0, \quad /1/$$

$$A(u, x, h, \tau_2) = x^4 (q C_1 S_2 - 4 u^2 \beta_1^2 C_2 S_1), \quad /2/$$

$$B(u, x, h, \tau_2) = 8 u^2 q (1 - C_1 C_2) + (q^2 + 16 \beta_1^2 \beta_2^2 u^4) S_1 S_2, \quad /3/$$

$$S_m = \text{sh}(h \beta_m) / \beta_m, \quad C_m = \text{ch}(h \beta_m), \quad m=1,2, \quad q = 2u^2 - x^2,$$

$$\beta_1 = \sqrt{u^2 - \tau_2^2 x^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{u^2 - x^2}, \quad \alpha = \sqrt{u^2 - \tau_1^2 x^2},$$

$$\tau_2 = c_t / c_e, \quad \tau_1 = c_t / c, \quad \lambda = \rho_0 / \rho, \quad x = \omega L / c_e,$$

$$h = H / L, \quad u = \zeta + i\tau, \quad x = x_1 + i x_2, \quad \omega = \omega_1 + i \omega_2,$$

де c_t, c_e - швидкості поширення хвиль зсуву та розширення в пружному шарі; c - швидкість звуку в рідкому акустичному півпросторі; ρ_0, ρ - відповідно густина рідини та матеріалу пружного шару; L - довільний лінійний параметр; ζL^{-1} - параметр перетворення Фур'є або Ханкеля по координаті, напрямлений вздовж границі розподілу середовищ; ω - параметр комплексного перетворення Фур'є по часу, у випадку не-стаціонарної задачі; ω_1 - частота у випадку стаціонарної задачі.

Через I_+ позначимо верхню половину $\mathcal{X}$ - площини ($\text{Im} x > 0$), через I_- - нижню ($\text{Im} x < 0$), а дійсну вісь $\mathcal{X}$ - площини через I_0 . Дисперсійне рівняння /1/ розглядається у комплексній площині $u = \zeta + i\tau$ при фіксованих значеннях комплексного параметра $x = x_1 + ix_2$. На основі принципу причинності [9] комплексний параметр повинен належати області I_+ .

Вітка функції $\alpha = (u^2 - \tau_1^2 x^2)^{0.5}$ вибрана так, щоб при $\zeta \rightarrow +\infty$ виконувалось $\alpha \rightarrow \zeta$ /верхній лист дволистої ріманової поверхні/. Розрізи для функції α при фіксованому $x \in I_+ \cup I_0$ на дволистій рімановій поверхні $u = \zeta + i\tau$ згідно з принципом причинності задовольняють умову $\text{Re} \alpha = 0$.

Функції $A(u, x, h, \tau_2)$ і $B(u, x, h, \tau_2)$, які визначаються формулами /2/, /3/ є регулярними функціями комплексної змінної u при фіксованих значеннях x і не залежать від механічних параметрів акустичної рідини. Рівняння $A(u, x, h, \tau_2) = 0$ - дисперсійне рівняння для пружного шару, що лежить без тертя на жорсткому півпросторі [4], рівняння $B(u, x, h, \tau_2) = 0$ - дисперсійне рівняння для пружного шару з вільними границями [1].

Функція $\Delta(u, x)$ - неперервна функція h , має дві точки галузження $u = \pm \tau_1 x$ ($x \in I_0 \cup I_+$), які існують при невироджених пружних властивостях півпростору, є парною функцією ζ при $x \in I_+ \cup I_0$ та при $|\zeta| > \tau_1 |x_1|$ приймає дійсні значення.

Всі дійсні корені дисперсійного рівняння

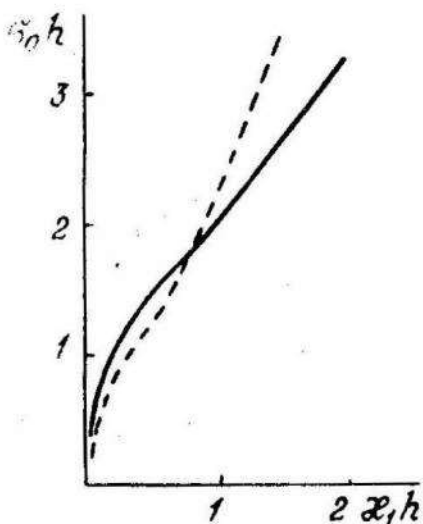
$$\Delta(\zeta, x_1) = 0 \quad /4/$$

обмежені по $|\zeta|$ зверху [2]. При збільшенні товщини шару H дисперсійне рівняння вироджується в добуток дисперсійного рівняння Релея для пружного півпростору $\Delta_0(\zeta, x_1, \tau_1) \equiv q - 1, \beta_2 \zeta^2 = 0$ та дисперсійного рівняння $\Delta_1(\zeta, x_1, \tau_2, \tau_1, \lambda) \equiv \lambda \beta_1 x_1^2 + \alpha \Delta_0(\zeta, x_1, \tau_1) = 0$ для пружного і рідкого півпросторів, які знаходяться у контакті.

При $x \in I_+$ функція $\Delta(u, x)$ регулярна і не має нулів у деякій смузі, яка містить в собі дійсну вісь комплексної площини $u = \zeta + i\tau$

Якщо $x \rightarrow x_1 (x \in I_+ \cup I_-)$, то на дійсній осі комплексної площини $u = \phi + i\tau$ з'являються нулі і точки галузнення, симетричні відносно початку координат. Вважаючи ці нулі аналітичними функціями в околі фіксованого параметра x_1 , і використавши їх розклад у ряд Тейлора в цьому околі, можна показати, що нулі $\phi_n, n=0,1,2,\dots,N$ дисперсійного рівняння, які лежать на додатній дійсній осі, зміщуються у верхню півплощину, а на від'ємній дійсній осі - в нижню комплексну півплощину $u(d\phi_n/dx_1 > 0)$, коли фіксований параметр $x \in I_0$ переходить в область I_+ .

У випадку "більш швидкого" по відношенню до акустичної рідини пружного шару ($c_2 > c_1 > c$) на довільних частотах існує тільки один [7] додатний дійсний корінь $\phi_0 = h^{-1}f(x, h)$ дисперсійного рівняння [4], залежність якого від x, h ілюструється на рисунку. Штрихова



лінія відповідає системі середовищ сталь - вода $\tau_2^2 = 0,293$; $\tau_1^2 = 4,652$; $\lambda = 0,132$, суцільна лінія відповідає системі середовищ лід - вода $\tau_2^2 = 0,250$; $\tau_1^2 = 1,692$; $\lambda = 1,123$. Асимптотой для функції $f(x, h)$ є пряма $\phi_0 h = V^{-1}x, h$, де V - корінь рівняння $\Delta_1(1, V, \tau_2, \tau_1, \lambda) = 0$; Vc_1 - швидкість поверхневої хвилі для пружного та рідкого півпросторів, які знаходяться у контакті.

При $|u/x| \ll 1$ справедливі такі асимптотичні зображення:

$$A(u, x, h, \tau_2) = x^6(\tau_2^2 - 1)/u/a(u/h),$$

$$B(u, x, h, \tau_2) = 4(\tau_2^2 - 1)^2 u^2 x^4 b(u/h),$$

$$a(t) = sh 2t + 2t, \quad b(t) = sh^2 t - t^2,$$

/5/

з яких випливає, що при $x \rightarrow 0$ функція $\Delta(u, x)$ вироджується у функцію, яка входить у знаменник трансформанти розв'язку статичних задач для пружного шару з вільними границями при скінченних або для пружного шару, який лежить без тертя на жорсткому півпросторі [8] при $\lambda \rightarrow \infty$.

При довільній частоті ($x \in I_0 U I_+$), як випливає з /5/, рівняння /1/ має зчисленну множину комплексних коренів, які при $|u| \rightarrow \infty$ наближаються до нулів знаменників трансформант розв'язків відповідних статичних задач. Якщо параметр x задовольняє наступні співвідношення

$hx - \pi n = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon| \ll 1$, $n = 1, 2, \dots$, то дисперсійне рівняння /1/ має корені u_1^n і u_2^n в околі точки $u = 0$, і не має їх в протилежному випадку.

Проводячи розклад функції $\Delta(u, x)$ в околі початку координат, отримуємо для нулів, які лежать поблизу точки $u = 0$, такі зображення:

$$u_1^n = (\delta U_- + iU_+) \pi n, \quad u_2^n = -u_1^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$U_{\pm} = \sqrt{(R \pm X)/2Z}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad Z = K^2 + D^2,$$

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad X_1 = M_1 K + G_1 D,$$

$$X_2 = G_2 K - M_2 D, \quad Y_1 = M_1 D - G_1 K, \quad Y_2 = G_2 D + M_2 K,$$

$$M_K = \lambda (-1)^n \varepsilon_K \cos(\pi n \tau_2), \quad G_K = \tau_1 \tau_2^{-1} (-1)^n \varepsilon_K \sin(\pi n \tau_2), \quad K = 1, 2,$$

$$K = \lambda (-1)^n [4\tau_2 \sin(\pi n \tau_2) - 0.5 \pi n \cos(\pi n \tau_2)],$$

$$D = 8\tau_1 [1 - (-1)^n \cos(\pi n \tau_2)] - \pi n \tau_1 0.5 (-1)^n \sin(\pi n \tau_2) \tau_2^{-1},$$

$\delta = +1$, якщо $Y < 0$ і $\delta = -1$, коли $Y > 0$.

При кожному фіксованому n нулі розташовані симетрично відносно початку координат і при $\varepsilon = 0$ зливаються у нуль другого порядку. У зв'язку з симетрією нулів прослідкуємо тільки за нулем u_1^n , для якого завжди $\text{Im} u_1^n > 0$. Аналіз показує, що залежно від того, по якому напрямку наближається параметр $x \in I_0 U I_+$ до значень $hx = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, нуль u_1^n може лежати правіше або лівіше осі $\sigma = 0$. Наприклад, коли $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 < 0$, то нуль лежить лівіше осі $\sigma = 0$ і при $n \rightarrow \infty$ наближається до додатної осі $\tau = 0$, а при $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 > 0$ нуль лежить правіше осей $\sigma = 0$ і при $n \rightarrow \infty$ наближається до додатної осі $\tau = 0$.

Аналогічні дослідження можна провести і для від'ємних значень параметрів $hx = \pi n$, $n = -1, -2, \dots$.

Список літератури: 1. Б а б е ш к о В.А. Об условиях излучения для упругого слоя. - ДАН СССР, 1973, т.213, № 3. 2. Б о б р о - в и ц к и й Ю.И. Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе. - Акуст.журнал, 1977, т.23, вып.1. 3. Б р е х о в с к и х Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. 4. Б ы р д и н В.М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца. - ДАН СССР, 1978, т.238, № 2. 5. В о р о в и ч И.И., А л е к с а н д р о в В.М., Б а б е ш к о В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 6. К е й л и с - Б о р о к В.И. Интерференционные поверхностные волны. - М.: Изд-во АН СССР, 1960. 7. К р а с и л ь н и к о в В.Н. Некоторые свойства волновых процессов в жидком полупространстве, ограниченном упругим слоем. - Проблемы дифракции и распространения волн, 1965, № 4. 8. М о л о т к о в Л.А. К вопросу о колебаниях тонкого упругого слоя, заключенного между двумя упругими полупространствами. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Харьков, 1970. 9. М о к р и к Р.И., Б а р а н В.П. Об условии излучения в динамических задачах теории упругости. - ДАН АН УССР, серия А, 1977, № 8.

УДК 539.311

В.К.Опанасович, М.С.Драган

КРУЧЕНИЯ ПЛИТЫ С ТОНКОСТІННИМ ПРЯМОЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити товщиною $2h$ з тонкостінним пружним включенням довжини $2a$ і ширини $2b$, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого на безмежності скрутучого моменту H_{xy} /рис.1/.

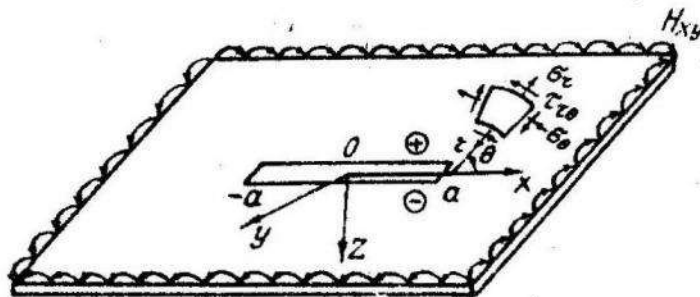


Рис. 1.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, будемо позначати індексом "0", а знаками плюс і мінус - граничні значення функцій відповідно на верхньому і нижньому березі включення, сегмент дійсної осі $[-a, a]$ - через L .

Припускаємо, що на берегах включення такі умови контакту:

$$\begin{aligned} (M_y)_0^\pm &= (M_y)^\pm; & \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_0^\pm &= \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)^\pm; \\ W_0^\pm &= W^\pm; & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0^\pm &= \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^\pm. \end{aligned} \quad /1/$$

При відсутності зовнішнього нормального навантаження, напружений стан ізотропної плити можна виразити через дві функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ за формулами [3]

$$\begin{aligned} \chi \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} &= -\frac{1}{D(1-\nu)} f + iC, \\ \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} &= \frac{\partial g}{\partial x}, \end{aligned} \quad /2/$$

де

$$f = M_y + i \left(H_{xy} + \int_{-a}^x N_y(x) dx \right); \quad g = i \left(\frac{\partial W}{\partial y} + i \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z \bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z);$$

$$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2); \quad \chi = (3+\nu)/(1-\nu);$$

E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; C - невідома постійна.

Застосовуючи до області включення формули /2/, нехтуючи при цьому величинами вищих порядків малості порівняно з a і зносячи деякі вирази з берегів включення на вісь Ox , можемо записати

$$\begin{aligned} f_0^+ - f_0^- &= -2ib D_0 (1-\nu_0) K_2'(x) \quad x \in L, \\ f_0^+ + f_0^- &= \frac{2D_0(1-\nu_0)}{(1+\chi_0)} [2\chi_0 K_1(x) + (\chi_0-1) K_2(x)] \quad x \in L, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^+ + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^- &= \frac{2}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0) K_1(x) + 2K_2(x)] \quad x \in L, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^+ - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^- &= 2ib K_1'(x) \quad x \in L, \end{aligned} \quad /3/$$

де $K_t(x)$ ($t=1,2$) - невідомі функції.

Для пластинки граничні умови /1/ з берегів включення знесемо на вісь Ox . На основі співвідношень /1/, /2/ і /3/ отримаємо наступ-

ні крайові задачі для знаходження функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$\begin{aligned} [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- &= 2\tau b K_1'(x) \quad x \in L, \\ [\chi \Phi(x) + \Omega(x)]^+ - [\chi \Phi(x) + \Omega(x)]^- &= 2 \frac{\mu_0}{\mu} \tau b K_2'(x) \quad x \in L; \quad /4/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi [\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] &= \frac{2\mu_0}{\mu(1+\chi_0)} [2\chi_0 K_1(x) + \\ &+ (\chi_0 - 1) K_2(x)] + \tau C \quad x \in L, \\ [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) + \Omega(x)]^- &= \frac{2}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0) K_1(x) + 2K_2(x)] \quad x \in L, \quad /5/ \end{aligned}$$

де μ, μ_0 - постійні Ляме. Поза L стрибки відсутні.

Розв'язуючи задачі лінійного спряження /4/, отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{b}{\pi(1+\chi)} \left[\int_{-a}^a \frac{K_1'(t) dt}{t-z} + \frac{\mu_0}{\mu} \int_{-a}^a \frac{K_2'(t) dt}{t-z} \right], \\ \Omega(z) &= \frac{b}{\pi(1+\chi)} \left[-\chi \int_{-a}^a \frac{K_1'(t) dt}{t-z} + \frac{\mu_0}{\mu} \int_{-a}^a \frac{K_2'(t) dt}{t-z} \right] + \bar{\Gamma}', \quad /6/ \end{aligned}$$

де $\Gamma' = \tau H_{xy}^{\infty} / D(1-\nu)$.

Підставляючи вирази функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ /6/ у співвідношення /5/, одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь типу Прандті для визначення невідомих функцій $K_{\tau}(x)$ ($\tau=1,2$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0) K_1(x) + 2K_2(x)] - \frac{b(1-\chi)}{\pi(1+\chi)} \int_{-a}^a \frac{K_1'(t) dt}{t-x} - \\ - \frac{2b\mu_0}{\pi\mu(1+\chi)} \int_{-a}^a \frac{K_2'(t) dt}{t-x} = \bar{\Gamma}' \quad x \in L, \quad /7/ \\ \frac{\mu_0}{\mu(1+\chi_0)} [2\chi_0 K_1(x) + (\chi_0 - 1) K_2(x)] - \frac{2b\chi}{\pi(1+\chi)} \int_{-a}^a \frac{K_1'(t) dt}{t-x} - \\ - \frac{\mu_0 b(\chi-1)}{\mu(\chi+1)} \int_{-a}^a \frac{K_2'(t) dt}{t-x} = -\bar{\Gamma}' - \tau C \quad x \in L. \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь /7/ будемо шукати у вигляді [1].

$$K_{\tau}(ax) = K_{0\tau} - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} X_{m\tau} U_{m-1}(x) \quad (\tau=1,2), \quad /8/$$

де $K_{0\tau}, X_{m\tau}$ ($\tau=1,2$) - невідомі коефіцієнти; $T_m(x), U_m(x)$ - поліноми Чебишова відповідно першого та другого роду.

Використовуючи співвідношення /8/ із формул /6/, запишемо

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{b}{a(1+\chi)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_{m1} + \frac{\mu_0}{\mu} X_{m2} \right) \left[\frac{a T_m(\frac{z}{a})}{\sqrt{z^2 - a^2}} - U_{m-1}(\frac{z}{a}) \right], \quad /9/ \\ \Omega(z) &= \frac{b}{a(1+\chi)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\chi X_{m1} - \frac{\mu_0}{\mu} X_{m2} \right) \left[\frac{a T_m(\frac{z}{a})}{\sqrt{z^2 - a^2}} - U_{m-1}(\frac{z}{a}) \right] + \bar{\Gamma}'. \end{aligned}$$

Підставляючи співвідношення /8/ у /7/ і використовуючи результати праці [1], отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу $X_{m\bar{i}}$ ($\bar{i}=1,2$)

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [(1-x_0)X_{m1} + 2X_{m2}] + C_1 X_{n1} + C_2 X_{n2} &= A_n, \\ \frac{2\mu_0}{\mu(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [2x_0 X_{m1} + (x_0-1)X_{m2}] + C_3 X_{n1} + C_4 X_{n2} &= B_n, \end{aligned} \quad /10/$$

де

$$H(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m+n - \text{ непарне;} \\ \frac{1}{(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{(m-n+1)(m-n-1)}, & \text{якщо } m+n \text{ парне;} \end{cases}$$

$$A_1 = \pi(A_0 + \bar{F}'), B_1 = (\bar{F}' + B_0 + iC) \cdot \pi; A_n = B_n = 0, n \geq 2;$$

$$A_0 = \frac{1}{(1+x_0)} [(1-x_0)K_{01} + 2K_{02}]; B_0 = \frac{1}{(1+x_0)} [2x_0 K_{01} + (x_0-1)K_{02}] \frac{\mu_0}{\mu};$$

$$C_1 = \frac{\pi b(1-x)}{a(1+x)}; C_2 = \frac{2\pi b\mu_0}{a\mu(1+x)}; C_3 = \frac{2\pi b x}{a(1+x)}; C_4 = \frac{\pi b\mu_0(x-1)}{a\mu(1+x)}.$$

Аналогічно [5] постійні A_0 і B_0 візьмемо у вигляді

$$A_0 = \bar{F}' \left[\frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu_0} \right]^{1/2}; B_0 = -\bar{F}' \left[\frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu} \right]^{1/2},$$

а постійну C знайдемо з умови [3]

$$\operatorname{Re} \int_{-a}^a [(\varphi-\omega)^+ - (\varphi-\omega)^-] dt = 0, \quad /11/$$

де $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$; $\omega(z) = \int \Omega(z) dz$.

Враховуючи формули /6/, після нескладних перетворень із співвідношення /11/ отримуємо

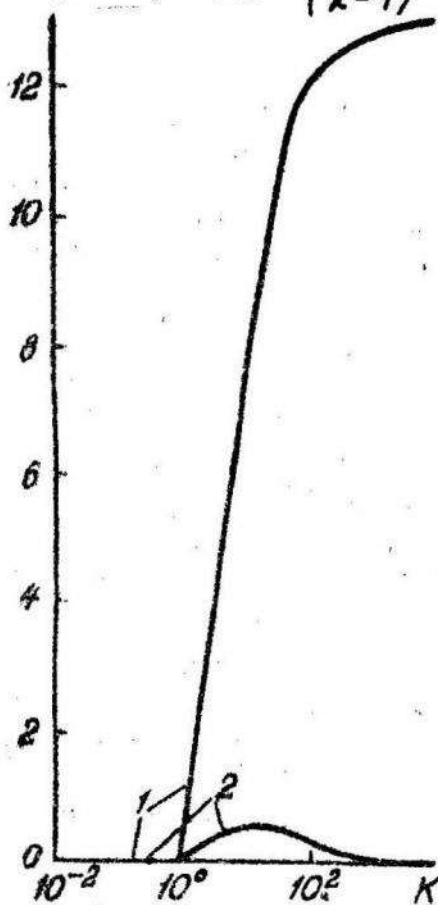
$$J_m X_{11} = 0. \quad /12/$$

Г.Т.Сулим вважає, що для тонкостінних включень існують чотири коефіцієнти інтенсивності напружень. Дійсно, якщо проробити подібні викладки, як у монографії [4], то розподіл напружень в околі кінця включення буде виражатись через чотири коефіцієнти інтенсивності напружень і в полярній системі координат z, θ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \phi_z &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi z}} \left\{ \left[\cos \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right] K_1 - \left[3\sin \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] K_2 + \right. \\ &+ \left. \left[-(1+2\kappa) \cos \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right] K_3 - \left[(1-2\kappa) \sin \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{3+5\nu}{1-\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] K_4 \right\} \frac{z}{h}, \\ \phi_\theta &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi z}} \cdot \frac{z}{h} \left\{ \left[\cos \frac{3}{2}\theta - \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right] K_1 + \left[-3\sin \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] K_2 - \right. \\ &- \left. \left[(1+2\kappa) \cos \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right] K_3 + \left[-(1-2\kappa) \sin \frac{3}{2}\theta + \left(\frac{5+3\nu}{1-\nu} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] K_4 \right\}, \\ \tau_{z\theta} &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi z}} \cdot \frac{z}{h} \left\{ (\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2}) K_1 + (3\cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{\theta}{2}) K_2 + \right. \\ &+ \left. [-(1+2\kappa) \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2}] K_3 + [(1-2\kappa) \cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{\theta}{2}] K_4 \right\}, \end{aligned}$$

де K_i ($i=1,2,3,4$) – коефіцієнти інтенсивності напружень, які знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\kappa b E h M_0}{\mu(\kappa-1)} \sum_{m=1}^{\infty} U_m; \\ K_3 - iK_4 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{b \kappa E h}{(\kappa-1)} \sum_{m=1}^{\infty} X_m. \end{aligned} \quad /14/$$



Переходячи у системі /10/ і співвідношеннях /7/ до границі при $M_0 \rightarrow 0$, $M_0 \rightarrow \infty$ і $M_0 \rightarrow M$, одержуємо граничні випадки відповідно для тріщини, жорсткого включення і суцільної площини, які збігаються з розв'язками, наведеними у працях [2, 3].

На ЕОМ М-222 проведено числовий аналіз задачі, результати якого показані на рис. 2. Система рівнянь /10/, яка буде квазірегулярною, розв'язували методом редукції, тобто у розкладі /8/ брали скінченне число членів N . Обчислення проводили

Рис. 2.

при таких значеннях параметрів: $b/a = q_1$, $\nu = \nu_0 = 1/3$ і різній відносній жорсткості $K = M_0/M$. Кривій 1 відповідає залежність $(-h^2 K_2 / \sqrt{a} H_{xy}^\infty)$, а кривій 2 — $(-h^2 K_1 / \sqrt{a} H_{xy}^\infty)$. Зауважимо, що в даному випадку $K_1 = K_3 = 0$.

Список літератури: 1. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. — Математические методы и физико-механические поля, 1975, вып. I. 2. М е р - к у л о в В.А. Изгиб пласти с разрезами вдоль прямой или дуг окружности. — Механика твердого тела, 1975, № 3. 3. М о р а р ь Г.А. П о п о в Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — Прикладная математика и механика, 1970, 34, № 3. 4. П р у с о в И.А. Метод сопряжения в теории плит БГУ им. В.И. Ленина. Минск, 1975. 5. Ч е р е п а н о в Г.Ц. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.

УДК 539.311

М.С. Драган

ЗГІН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ПРЯМОЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо пружну рівновагу консольної балки довжиною $2L$, висотою $2H$ і товщиною 2τ з тонкостінним пружним включенням довжиною 2ℓ і шириною $2h$, яка знаходиться під дією зосередженої сили Q /рис. I/.

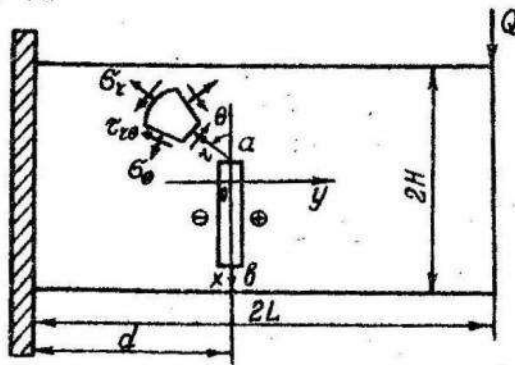


Рис. I.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, будемо позначати індексом "0", значками плюс і мінус — граничні значення функцій на верхньому і нижньому берегах включення, сегмент дійсної осі $[a, b]$ — через W .

Вважаємо, що на берегах включення такі умови:

$$\begin{aligned} (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ &= (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+, \\ (u + iV)_0^+ &= (u + iV)_0^+. \end{aligned} \quad /1/$$

Балку розглядаємо як нескінченну пластинку [3], тоді напружено-деформований стан цієї балки /пластинки/ можна виразити через дві функції комплексної змінної за формулами

$$\begin{aligned} \phi_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu(u + iV) &= \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad /2/$$

і, крім того, при великих $|z|$ функції $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ можемо зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= A_1 z^2 + A_2 z + O\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi_0(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \\ \Omega(z) &= B_1 z^2 + B_2 z + B_3 + O\left(\frac{1}{z}\right) = \Omega_0(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned} \quad /3/$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= -iQ/8J; \quad A_2 = -Q(2L-d)/4J; \quad B_1 = 5iQ/8J; \\ B_2 &= -3Q(2L-d)/4J; \quad B_3 = -iQH^2/2J; \quad J = 4\pi H^3/3. \end{aligned} \quad /4/$$

Оскільки розглядається тонкостінне включення, то, нехтуючи величинами вищих порядків малості порівняно з h і зносячи деякі члени з берегів включення на вісь OX , на підставі (2) можемо записати

$$\begin{aligned} (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ - (\phi_y - i\tau_{xy})_0^- &= 2ihK'(x) \quad x \in W, \\ (\phi_y - i\tau_{xy})_0^+ + (\phi_y - i\tau_{xy})_0^- &= \frac{2}{(1+x_0)} [(1-x_0)K(x) + 2M(x)] \quad x \in W, \\ (u + iV)_0^+ + (u + iV)_0^- &= \frac{1}{\mu_0(1+x_0)} [2x_0K(x) + (x_0-1)M(x)] \quad x \in W, \\ (u + iV)_0^+ - (u + iV)_0^- &= \frac{ih}{\mu_0} M'(x) \quad x \in W, \end{aligned} \quad /5/$$

де $K(x)$ і $M(x)$ - невідомі функції.

Для пластинки граничні умови з берегів включення зносимо на вісь OX таким чином, щоб з розв'язку задачі можна було отримати граничні випадки тріщини, жорсткого включення і однорідної балки. Виходячи із (1), використовуючи (2) і (5), одержимо такі крайові задачі:

$$[\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = 2\tau h K'(x) - 2K_1(x) \quad x \in W,$$

$$[\chi \Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\chi \Phi(x) + \Omega(x)]^- = \frac{2\mu}{\mu_0} \tau h M'(x) - 2M_1(x) \quad x \in W, \quad /6/$$

$$[\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = \frac{2}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0)K(x) + 2M(x)] \quad x \in W,$$

$$\chi [\Phi^+(x) + \Phi^-(x)] - [\Omega^+(x) + \Omega^-(x)] = \frac{2\mu}{\mu_0(1+\chi_0)} [2\chi_0 K(x) + (\chi_0 - 1)M(x)] \quad x \in W, \quad /7/$$

де

$$K_1(x) = \tau h [2(A_1 - B_1)x + (A_2 - B_2)] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu},$$

$$M_1(x) = \tau h [2(\chi A_1 + B_1)x + (\chi A_2 + B_2)] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}. \quad /8/$$

Розв'язуючи задачі лінійного спряження (6), одержуємо

$$\Phi(z) = \frac{h}{\pi(1+\chi)} \left[\int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-z} dt \right] + \Phi_0(z), \quad /9/$$

$$\Omega(z) = \frac{h}{\pi(1+\chi)} \left[-\chi \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-z} dt \right] + \Omega_0(z),$$

де $K_2(x) = K_1(x)/\tau h$, $M_2(x) = \mu_0 M_1(x)/\mu \tau h$. /10/

Виходячи із (7) і враховуючи (9), дістаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Прандтля для визначення невідомих функцій $K(x)$ і $M(x)$

$$\frac{1}{(1+\chi_0)} [(1-\chi_0)K(x) + 2M(x)] - \frac{h(1-\chi)}{\pi(1+\chi)} \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-x} dt -$$

$$- \frac{2h\mu}{\mu_0(1+\chi)} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-x} dt = \Phi_0(x) + \Omega_0(x) \quad x \in W, \quad /11/$$

$$\frac{\mu}{\mu_0(1+\chi_0)} [2\chi_0 K(x) + (\chi_0 - 1)M(x)] - \frac{2h\chi}{\pi(1+\chi)} \int_a^b \frac{[K'(t) - K_2(t)]}{t-x} dt -$$

$$- \frac{h\mu(\chi - 1)}{\pi\mu_0(1+\chi)} \int_a^b \frac{[M'(t) - M_2(t)]}{t-x} dt = \chi \Phi_0(x) - \Omega_0(x) \quad x \in W.$$

Розв'язок системи (II) шукаємо у вигляді [I]

$$K(x_1) = K_0 + \chi_0 \arcsin x + K_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m T_m(x), \quad /12/$$

$$M(x_1) = M_0 + \chi_0 \arcsin x + M_3(x_1) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m T_m(x),$$

де $\chi_1 = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$, $K_3(x) = [(A_1 - B_1)x^2 + (A_2 - B_2)x] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}$;

$$M_3(x) = [(\chi A_1 + B_1)x^2 + (\chi A_2 + B_2)x] \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad /13/$$

K_0, M_0, X_m, Y_m - невідомі коефіцієнти; $T_m(x)$ і $U_m(x)$ - поліноми Чебишова відповідно першого і другого роду.

Підставляючи (12) у (9), одержуємо формули для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= + \frac{2h}{(b-a)(1+x)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m + \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \right. \\ &\quad \left. - U_{m-1}(z_1) \right] + \Phi_0(z), \\ \Omega(z) &= \frac{2h}{(b-a)(1+x)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(x X_m - \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) \frac{T_m(z_1)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - U_{m-1}(z_1) \right] + \Omega_0(z),\end{aligned} \quad /14/$$

де $z = \left(\frac{b-a}{2} \right) z_1 + \frac{a+b}{2},$

враховуючи (3), $X_0 = Y_0 = 0.$

Підставляючи вирази (12) у співвідношення (11), дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу X_m і Y_m

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [(1-x_0) X_m + 2 Y_m] + C_1 X_n + C_2 Y_n &= D_n, \\ \frac{2\mu}{\mu_0(1+x_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} H(m,n) [2x_0 X_m + (x_0-1) Y_m] + C_3 X_n + C_4 Y_n &= P_n,\end{aligned} \quad /15/$$

де

$$H(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m+n - \text{непарне,} \\ \frac{1}{(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{(m-n+1)(m-n-1)}, & \text{якщо } m+n - \text{парне;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\pi h (1-x)}{(b-a)(1+x)}, C_2 = \frac{2\pi h \mu}{\mu_0(1+x)(b-a)}, C_3 = \frac{2\pi h x}{(b-a)(1+x)}, C_4 = \frac{\pi h \mu (x-1)}{(b-a)\mu_0(1+x)}, \\ D_0 &= \frac{1}{(1+x_0)} [(1-x_0) K_0 + 2 M_0], P_0 = \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} [2x_0 K_0 + (x_0-1) M_0]; \\ D_n &= \int_{-1}^1 [-\Omega_0(x_1) - x \Phi_0(x_1) + \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} ((1-x_0) K_3(x_1) + 2 M_3(x_1)) + D_0] \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx; \\ P_n &= \int_{-1}^1 [\Omega_0(x_1) - x \Phi_0(x_1) + \frac{\mu}{\mu_0(1+x_0)} (2x_0 K_3(x_1) + (x_0-1) M_3(x_1)) + P_0] \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx.\end{aligned} \quad /16/$$

Постійні D_0 і $Re P_0$ беремо у такому вигляді:

$$D_0 = B_3 \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad Re P_0 = -Re B_3 \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu}, \quad /17/$$

а постійну $J_m \rho_0$ знаходимо з умови [5]

$$\operatorname{Re} \int_{\Lambda} z [\bar{\Omega}(z) + \Phi(z)] dz = 0, \quad /18/$$

де Λ - область виключення.

Враховуючи формули (14), після нескладних перетворень із співвідношення (18) маємо $J_m \chi_1 = 0$. /19/.

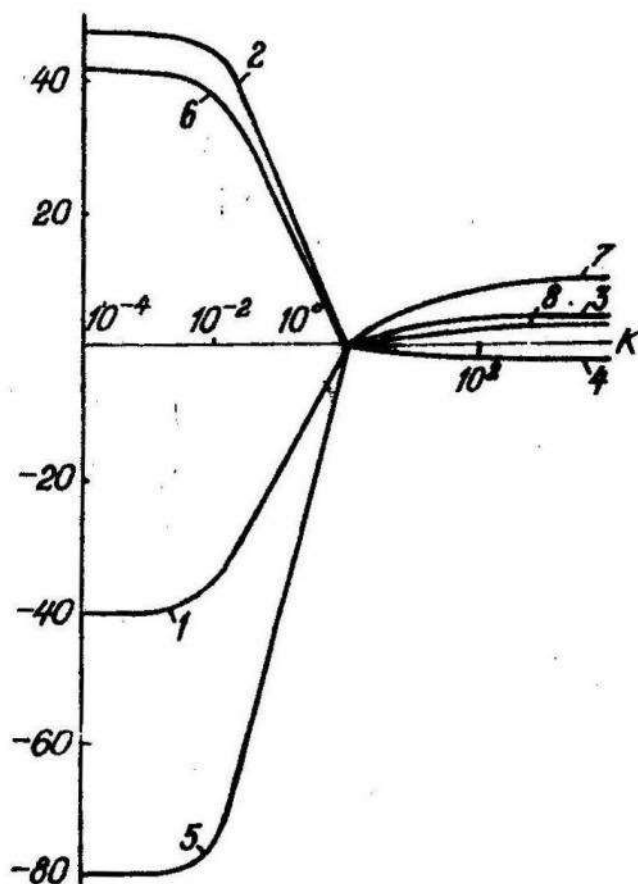


Рис. 2.

Напружений стан в околі кінця виключення в полярній системі координат /рис.1/ можна описати такими формулами [4]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_1}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \\ 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3}{2}\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + \frac{K_2}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3}{2}\theta \\ -3\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3}{2}\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + /20/$$

$$+ \frac{K_3}{4\sqrt{2\tau}} \begin{bmatrix} 5\cos\frac{\theta}{2} + (1+2x)\cos\frac{3}{2}\theta \\ 3\cos\frac{\theta}{2} - (1+2x)\cos\frac{3}{2}\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} - (1+2x)\sin\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + \frac{K_4}{4\sqrt{2\tau}} \begin{bmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2} + (1-2x)\sin\frac{3}{2}\theta \\ -3\sin\frac{\theta}{2} - (1-2x)\sin\frac{3}{2}\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} + (1-2x)\cos\frac{3}{2}\theta \end{bmatrix} + O(\tau^0),$$

де K_i ($i=1,2,3,4$) - коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються за формулами

$$K_1^j - iK_2^j = -\frac{2hM}{M_0(1+x)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} y_m,$$

$$K_3^j - iK_4^j = -\frac{2h}{(1+x)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} x_m; \quad |2I|$$

$j=1$ - для точки a ; $j=2$ - для точки b .

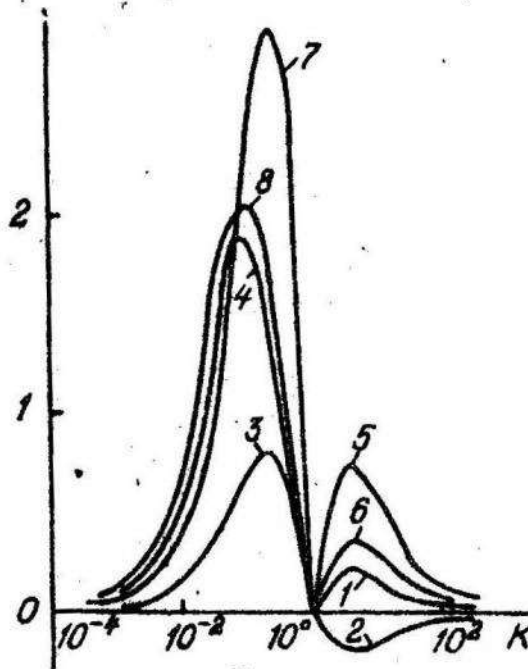


Рис. 3.

На ЕОМ М-222 проведено числовий аналіз розв'язку задачі, результати якого показані на рис. 2, 3. Обчислення проводили при таких значеннях параметрів: $h/a = 0,2$; $b/a = 5$; $(2L-d)/a = 20$; $H/a = 10$ і різних відносній жорсткості $K = M_0/M$. На рис. 2, 3 зображена графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$JK_i^j / \sqrt{2} Q a^{5/2} \quad (i=1,2,3,4).$$

Криві 1-4 відповідають точці a ($j=1$), криві 5-8 - точці b ($j=2$).

Список літератури: 1. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. - Прикладная математика и механика, 1970, т.34, вып.3. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 3. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. - К.: Наукова думка, 1968. 4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976.

УДК 534.III

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудзяний
НЕЛІНІЙНІ ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ БАЛКИ
ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вивчення поздовжніх коливань балки зі змінними геометричними та фізико-механічними характеристиками при врахуванні розсіювання енергії у матеріалі зводиться до побудови і дослідження розв'язку диференціального рівняння вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - b(x, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \Phi(u) + \varepsilon q(x) \cos \theta, \quad /1/$$

де $u = u(x, t)$ - переміщення перерізу балки з абсцисою x в момент часу t ; $a(x, \tau) = E(x, \tau)F(x)$; $b(x, \tau) = \rho(x, \tau)F(x)$; $E(x, \tau)$ - модуль Юнга; $F(x)$ - площа поперечного перерізу балки; $\rho(x, \tau)$ - густина; $\Phi(u)$ - деякий нелінійний функціонал, що враховує розсіювання енергії у матеріалі балки при коливаннях; $\varepsilon q(x)$ - збурююча сила; $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ - її миттєва частота; $\tau = \varepsilon t$ - повільний час; ε - малий параметр. При цьому робимо такі припущення: параметри балки мало змінюються за період коливань, і тому її можна розглядати як систему з повільно змінними параметрами; зміна геометричних характеристик в часі незначна і нею можна знехтувати. Це дає змогу вважати незалежною від τ форму коливань, тобто приймати її рівною виразу в деякий фіксований момент часу [1].

Враховуючи слабку нелінійність рівняння /1/, його розв'язок знаходимо асимптотичним методом [2]. Для випадку основного резонансу

перше наближення розв'язку подаємо у вигляді

$$u(x,t) = V(x)a \cos \varphi + \varepsilon u_1(x, \varphi, \psi), \quad /2/$$

де $\varphi = \theta + \psi$, причому амплітуда a і фаза ψ зв'язані співвідношеннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi), \quad /3/$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi). \quad /4/$$

Для визначення функцій $V(x)$, $A_1(\tau, a, \psi)$ і $B_1(\tau, a, \psi)$ із /1/, враховуючи /2/ - /4/, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dx} \left[a(x, \tau) \frac{dV(x)}{dx} \right] + \omega^2(\tau) b(x, \tau) V(x) = 0, \quad /5/$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, \tau) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] - \omega^2(\tau) b(x, \tau) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} = b(x, \tau) V(x) \left\{ \left[(\omega(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega(\tau) B_1 \right] \cos \varphi - \left[(\omega(\tau) - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\omega(\tau) A_1 + a \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right] \sin \varphi \right\} + \varphi_0 (aV(x) \cos \varphi) + q(x) \cos \theta. \end{aligned} \quad /6/$$

Рівняння /5/ з межевими умовами конкретної задачі служить для визначення функції деформації $V(x)$ і частоти власних коливань $\omega(\tau)$. Зауважимо, що отримати його точний розв'язок не завжди вдається. Тому надалі вважатимемо, що коефіцієнти $a(x, \tau)$ і $b(x, \tau)$ можна подати у вигляді відомих сум

$$a(x, \tau) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n(x, \tau) \right]; \quad b(x, \tau) = b_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{N_1} \delta_m b_m(x, \tau) \right]. \quad /7/$$

Переміщення $V(x)$ і частоту $\omega(\tau)$ вигідно шукати у вигляді асимптотичних розкладів

$$V(x) = V_0(x) + \sum \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} \delta_1^{\beta_1} \dots \delta_m^{\beta_m} V_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m}(x), \quad /8/$$

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \sum \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} \delta_1^{\beta_1} \dots \delta_m^{\beta_m} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m}(\tau), \quad /9/$$

де $\sum$ - означає сумування по індексах $\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m$ від 0 до ∞ , причому одночасно вони не дорівнюють нулеві.

Беручи до уваги /7/ - /9/, розв'язок однорідного рівняння із змінними коефіцієнтами /5/ зводимо до послідовного розв'язування неоднорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + \omega_0^2 b_0 V_0(x) = 0, \quad /10/$$

$$a_0 \frac{d^2 V_{vi}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{vi} = -2b_0 \omega_0 \omega_{vi} V_0(x) - a_0 \left(\frac{da_i}{dx} \frac{dV_0}{dx} + a_i \frac{d^2 V_0}{dx^2} \right), \quad /11/$$

$$a_0 \frac{d^2 V_{vj+N}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{vj+N} = -b_0 \omega_0 [2\omega_{vj+N} + \omega_0 b_j(x, \tau)] V_0(x), \quad /12/$$

$/j = 1, \dots, N/$

де ∇n - індекс, в якому на i -му місці стоїть одиниця, а на всіх інших - нулі.

Знайшовши $V_0(x)$ і ω_0 з рівняння /10/, можемо отримати вирази для поправок, що дозволяють уточнити частоту та прогин у першому наближенні по всіх параметрах. Спочатку, користуючись співвідношення

$$\int_0^L [a_0 \frac{d^2 V_{vi}}{dx^2} + b_0 \omega_0^2 V_{vi}] V_0(x) dx = 0, \quad /13/$$

з /11/ і /12/ знаходимо

$$\omega_{vi} = -\frac{a_0}{R_0} \int_0^L \left(\frac{da_i}{dx} \frac{dV_0}{dx} + a_i \frac{d^2 V_0}{dx^2} \right) V_0(x) dx, \quad /14/$$

$$\omega_{vj+N} = -\frac{\omega_0^2 b_0}{R_0} \int_0^L b_j(x, \tau) V_0^2(x) dx, \quad /15/$$

де $R_0 = b_0 \omega_0 \int_0^L V_0^2(x) dx$; $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$. Після цього можна

знайти вирази для V_{vi} і V_{vj+N} . Оскільки оператори рівнянь /10/ і /12/ однакові, то функції V_{vi} і V_{vj+N} матимуть вигляд

$$V_{vi}(x) = C_{vi} V_0(x) + \tilde{V}_{vi}(x), \quad /16/$$

$$\tilde{V}_{vj+N}(x) = C_{vj+N} V_0(x) + \tilde{V}_{vj+N}(x), \quad /17/$$

де $\tilde{V}_{vi}(x)$ і $\tilde{V}_{vj+N}(x)$ - часткові розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь /11/ і /12/, а $C_{vi} V_0(x)$ і $C_{vj+N} V_0(x)$ - загальні розв'язки відповідних однорідних диференціальних рівнянь.

Згідно з /8/, при врахуванні /16/ і /17/ функція $V(x)$ у першому наближенні по всіх параметрах запишемо у вигляді

$$V_i(x) = C_i V_0(x) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \tilde{V}_{vi}(x) + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_j \tilde{V}_{vj+N}(x), \quad /18/$$

$$\text{де } C_i = 1 + \sum_{i=1}^N \bar{C}_{vi} + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{C}_{vj+N}; \quad \bar{C}_{vi} = \varepsilon_i C_{vi}; \quad \bar{C}_{vj+N} = \delta_j C_{vj+N}.$$

У виразі для $V_1(x)$ /18/ залишається довільною постійна C_1 .
 Умову для її визначення запишемо на основі наступних міркувань. Відомо [3], що частота власних поздовжніх коливань для розглядуваної механічної коливної системи без розсіювання енергії у матеріалі визначається формулою

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l a(x, \tau) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_0^l b(x, \tau) V^2(x, \tau) dx} \quad /19/$$

Тобто задачу про визначення частоти власних коливань можна звести до знаходження мінімуму функціонала /19/. Підставляючи $V_1(x)$ в /19/, отримувемо умову мінімуму

$$\frac{\partial}{\partial C_1} \left\{ \int_0^l \left[a(x, \tau) \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)^2 - \omega_1^2 b(x, \tau) V_1^2 \right] dx \right\} = 0, \quad /20/$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \omega_{vi} + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_j \omega_{vj+N}, \quad /21/$$

З якої знаходимо C_1 .

Визначивши з /20/ C_1 і приймаючи, що $\bar{C}_{vi} = \bar{C}_{vj+N}$ для будь-яких i та j , маємо

$$C_{vi} = \frac{C_1 - 1}{\varepsilon_i (N + N_1)}; \quad C_{vj+N} = \frac{C_1 - 1}{\delta_j (N + N_1)}. \quad /22/$$

Отже, частота лінійних власних коливань ω і функція прогину $V(x)$ у першому наближенні знайдені повністю. Аналогічно визначаємо й інші наближення.

Відзначимо, що використання викладеної методики для конкретних задач показало її високу ефективність у випадку, коли коефіцієнти $a(x, \tau)$ і $b(x, \tau)$ незначно змінюються порівняно з a_0 і b_0 . У таких задачах уже перше наближення дає хороші результати.

Маючи вирази для ω і $V(x)$, перейдемо до розв'язку задачі з врахуванням розсіювання енергії у матеріалі. Використовуючи метод енергетичного балансу [4] в рівності /6/, беручи до уваги співвідношення

$$\iint_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, \tau) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] - \omega^2(\tau) b(x, \tau) \frac{\partial u_1}{\partial \varphi^2} \right\} V(x) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} dx d\varphi = 0, \quad /23/$$

одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
 -(\omega(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} + 2a\omega(\tau) B_1 &= M + P \cos \psi, \\
 2\omega(\tau) A_1 + (\omega(\tau) - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} &= N + P \sin \psi - a \frac{d\omega(\tau)}{d\tau},
 \end{aligned} \quad /24/$$

де

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^e \Phi_0 V(x) \cos \varphi \, dx d\varphi; \quad N = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^e \Phi_0 V(x) \sin \varphi \, dx d\varphi; \\
 P &= \frac{1}{R} \int_0^e q(x) V(x) dx; \quad R = \int_0^e b(x, \tau) V^2(x) dx,
 \end{aligned}$$

з якої знаходимо невідомі функції $A_1(\tau, a, \psi)$ і $B_1(\tau, a, \psi)$.

Зауважимо, що справедливність співвідношень /23/ і /13/ можна довести інтегруванням по частинах з використанням конкретних межових умов і рівностей /5/ і /10/.

Запишемо 2π - періодичний розв'язок системи /24/

$$A_1(\tau, a, \psi) = \frac{1}{2\omega(\tau)} \left(N - a \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right) + \frac{P \sin \psi}{\omega + \nu}, \quad /25/$$

$$B_1(\tau, a, \psi) = \frac{M}{2a\omega(\tau)} + \frac{P}{a(\omega + \nu)}. \quad /26/$$

Щоб отримати значення для M і N у /25/ і /26/, потрібно знати явний вираз функціонала $\mathcal{E} \Phi(u)$. Його можна вибрати, наприклад, згідно з працею [5].

Таким чином, за допомогою формул першого наближення /3/ і /4/ з врахуванням /25/ і /26/ можна дослідити одночастотні режими стаціонарних і нестаціонарних поздовжніх коливань стержня зі змінними параметрами і недосконалою пружністю матеріалу.

Знаходити вищі наближення амплітуди та фази недоцільно, оскільки в праці [6] показано, що для задач такого типу уже перше наближення дає результати, які повністю задовольняють точність інженерних розрахунків.

Список літератури: І. В а с и л е н к о Н.В. Применение асимптотических методов для исследования колебаний упругих тел с учетом изменения их температуры. - В сб.: Вопросы высокотемпературной прочности в машиностроении. К., Изд-во АН УССР, 1963. 2. Б о г о л ю б о в Н.Н. М и т р о п о л ь с к и й Ю.А. Асимптотические методы в теории нели-

ейних коливань. - М.: Наука, 1974. 3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1959. 4. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. - К.: Наукова думка, 1970. 5. Писаренко Г.С. О новом подходе к описанию контура петли гистерезиса в теории механических колебаний. - Проблемы прочности, 1971, № 6. 6. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. - К.: Изд-во АН УССР, 1955.

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб, Г.Т.Сулим

ВПЛИВ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ВІД ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Розглядаємо плоску стаціонарну задачу теплопровідності без врахування тепловіддачі через бічні поверхні для складного тіла з тонкостінними прошарками на границі розділу матеріалів. На осі абсцис $L = L' U L''$ декартової системи координат XOY розташована система V симетричних включень малої товщини $2h(x)$, так що $L' = \bigcup_{n=1}^N L_n$, де $L_n = [a_n, b_n]$ і на торцях включень $h(a_n) = h(b_n) = 0$. Вздовж верхньої L'_2 та нижньої L'_1 границь включень здійснюється ідеальний тепловий контакт з півплощинами S_2 та S_1 , що мають різні теплофізичні властивості і на L'_2 контактують безпосередньо. Задане джерело тепла потужності q_0 у точці $z_k = x_k + iy_k$ області S_k ($k=1,2$). Коефіцієнти теплопровідності включень, нижньої і верхньої півплощин рівні відповідно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Потрібно визначити температурне поле матриці.

Температуру в області $S_1 \cup S_2$ зобразимо у вигляді $t_0(z) = t_1(z) + t_2(z)$, де $t_1(z)$ - основне температурне поле, що відповідає задачі теплопровідності для двох контактуючих півплощин при відсутності включень

$$t_1(z) = (\delta_i^k + 2\delta_i^e n_k) m_k \ln |z - z_k| + \delta_i^k (n_k - n_e) m_k \ln |z - \bar{z}_k| + t_1^0, \quad /I/$$

$$\text{де } m_j = \frac{q_0}{2\pi\lambda_j}, \quad n_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (z \in S_i; i, j = k, l; k, l = 1, 2; k \neq l);$$

$t_2(z)$ – збурення поля температури в оточуючому середовищі, що викликане наявністю включень; t_1^0 – постійна.

Граничні значення функцій при прямуванні аргументу до осі абсцис з верхньої і нижньої півплощин позначатимемо відповідно верхніми індексами плюс і мінус.

Введемо в розгляд функції $F(z)$ і $\gamma_2(x)$, такі що $t_2(z) = \operatorname{Re} \int_{L'} F(z) dz$, $\gamma_2'(x) = t_2^{+}(x) - t_2^{-}(x)$. Перетворюючи умови ідеального теплового контакту включень з матрицею, використовуючи для певних наближень тонкостінність включень і застосовуючи методику розв'язування задачі Рімана-Гільберта, одержуємо сингулярне інтегродиференціальне рівняння типу Прандтлі

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\gamma_2'(t)}{t-x} dt - \alpha(x) \gamma_2'(x) = \beta g(x) \quad (x \in L'),$$

$$\text{де } g(x) = 2m_k \int_m \frac{1}{x-z_k}; \quad \alpha(x) = \frac{x}{h(x)}; \quad \beta = 1 - \alpha; \quad x = \frac{\lambda_0}{2\pi\lambda_1}. \quad /2/$$

Коли в рівняння /2/ визначити функцію стрибка $\gamma_2'(x)$, то збурення температурного поля у довільній точці матриці встановлюється співвідношенням

$$t_2(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{n_p}{\pi i} \int_{L'} \frac{\gamma_2'(t)}{t-z} dt \right] \quad (z \in S_2; z, p=1,2; z \neq p). \quad /3/$$

Розв'язок рівняння /2/ повинен задовольняти очевидну умову

$$\int_{a_n}^{b_n} \gamma_2'(t) dt = 0 \quad (n = \overline{1, N}). \quad /4/$$

Якщо включення теплоізолювані ($\lambda_0 = 0$), то $\alpha(x) = 0$ і рівняння /2/ розв'язується у замкнутому вигляді [3].

Якщо включення абсолютно теплопровідні ($\lambda_0 = \infty$), то з /2/ легко одержати $\gamma_2'(x) = h(x)g(x)$. Визначаючи скачок $\gamma_1'(x) = t_1(x+ih) - t_1(x-ih)$ основного температурного поля $t_1(z)$ на кромках включень, одержуємо, що скачок $\gamma_1'(x) + \gamma_2'(x)$ температури $t_0(z)$ на абсолютно теплопровідному включенні дорівнює нулю. Це означає, що температура всередині кожного такого включення по товщині не змінюється.

Як частковий випадок можна одержати розв'язок задачі теплопровідності для однорідної площини: досить прийняти у /2/

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$. Тоді $\beta g(x) \equiv 0$, з рівняння /2/ одержуємо $g_2'(x) = 0$
 $t_0(z) = m_k \ln |z - z_k| + t_1^0$.

Попередні підходи [1,4] до розв'язку задач з тонкостінними включеннями-прошарками дали змогу здійснювати точно лише граничний перехід до теплоізованого включення.

Як приклад розглядається одне включення, розміщене вздовж відрізка $[-a, a]$ дійсної осі, коли $h(x) = h_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{1/2q}$, ($q \geq 1$). При $q=1$ включення має еліптичну форму, при $q = \infty$ - прямокутну.

Розв'язок рівняння /2/ для $L' = [-a, a]$ з умовою $g_2(\pm a) = 0$ шукаємо у вигляді ряду з кореневою особливістю

$$g_2'(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{p=1}^{\infty} A_p T_p\left(\frac{x}{a}\right), \quad g_2'(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{p} U_{p-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad /5/$$

де $T_p(t), U_{p-1}(t)$ - поліноми Чебишова першого і другого роду.

Застосовувачи процедуру методу ортогональних поліномів для визначення невідомих коефіцієнтів розкладів /5/ маємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь [2]

$$\frac{1}{2} A_{k+1} + \alpha_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_p H_{pk}^q = g_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{де } H_{pk}^q = \frac{\pi \Gamma(2\nu)}{p 4^\nu} \sum_{\ell=1}^2 \frac{(-1)^{\ell+1} \sin(p_\ell \pi)}{\Gamma(1+\nu+p_\ell) \Gamma(\nu-p_\ell)}; \quad g_k = \beta \int_{-1}^1 g(at) \sqrt{1-t^2} U_k(t) dt;$$

$$\alpha_0 = \frac{\partial a}{h_0}; \quad \nu = 1 - 1/2q; \quad 2p_\ell = k - (1)^\ell p; \quad (\ell = 1, 2).$$

Система рівнянь /6/ квазірегулярна при всіх фізично можливих значеннях параметрів [6] і до її розв'язування можна застосувати метод редукції [5].

Для включення еліптичної форми ($q=1$) розв'язок системи /6/ записується явно $A_p = \frac{2p g_{p-1}}{\pi(p+\alpha_0)}$. Зокрема, коли джерело тепла розташоване у точці $z_k = i y_k$, то

$$A_{2p-1} = \frac{4\beta m_k}{a} (-1)^{p-1} \frac{2p-1}{2p-1+\alpha_0} \operatorname{sign}(y_k) \left[\sqrt{1 + \left(\frac{y_k}{a}\right)^2} - \frac{|y_k|}{a} \right]^{2p-1}, \quad A_{\leq p} = 0.$$

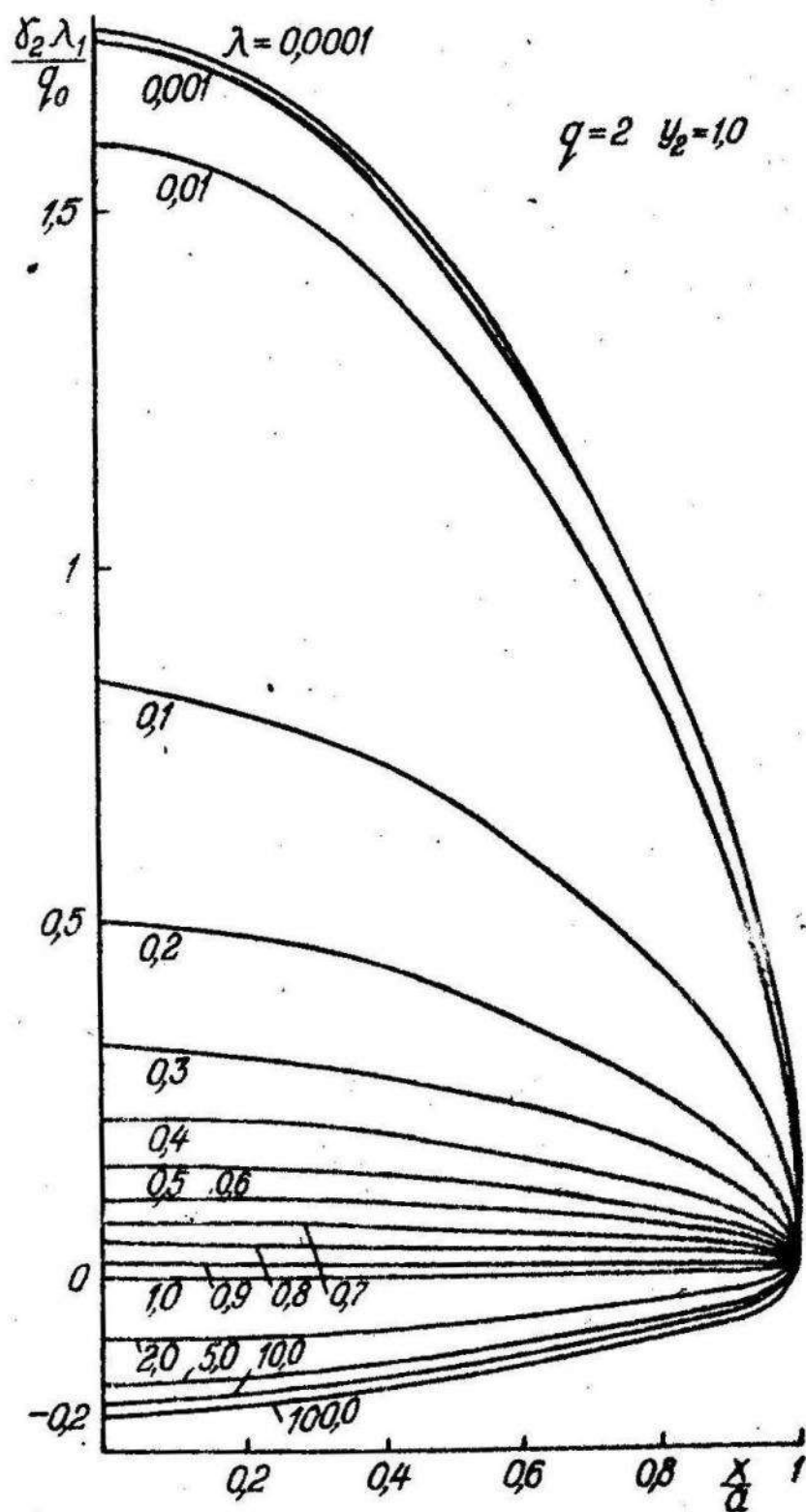


Рис. I.

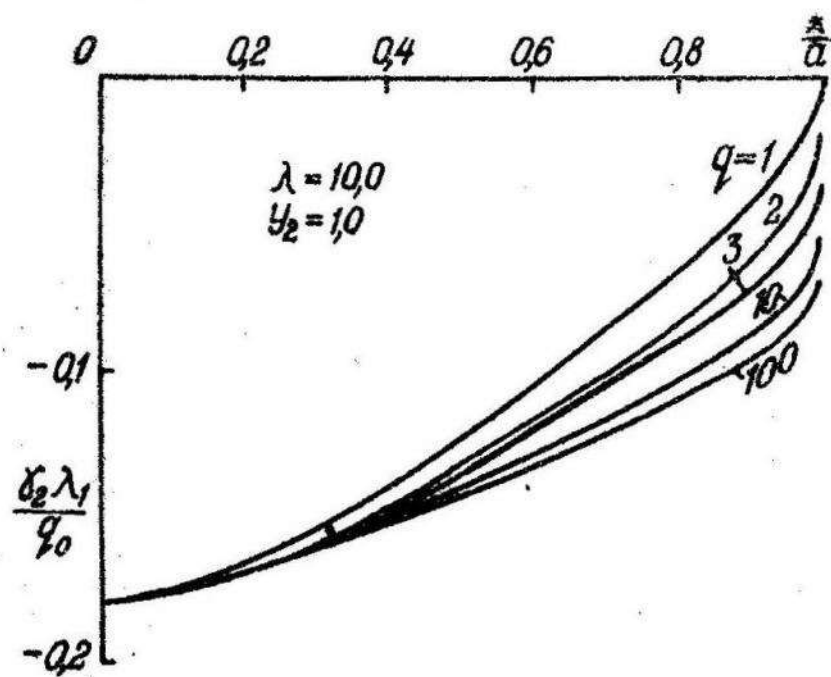


Рис. 2.

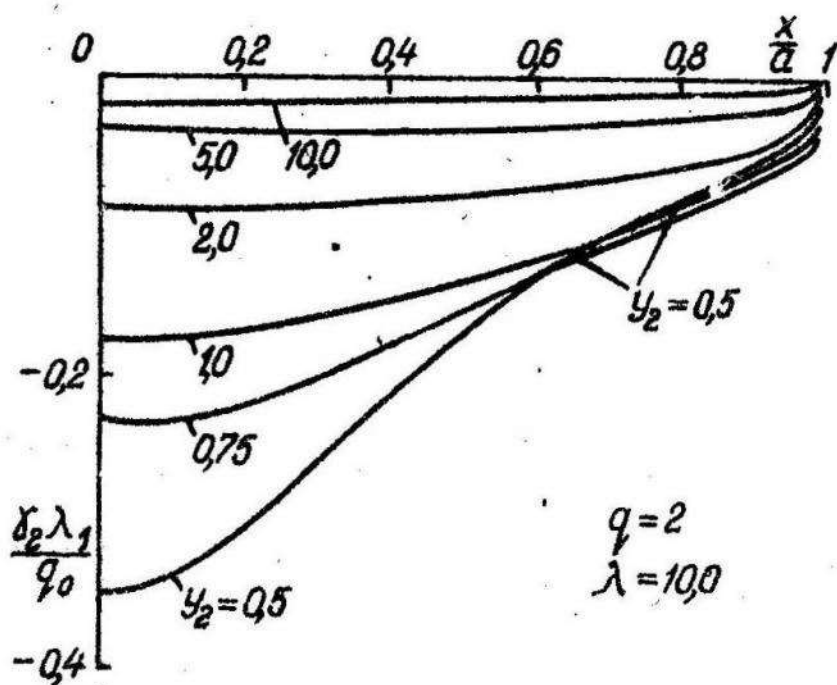


Рис. 3.

На ЕОМ ЕС-1022 проведені розрахунки стрибка $\gamma_2(x)$ збуреного поля на включенні в однорідній площині $(\lambda_1 = \lambda_2)$ при $a/h_0 = 10$ і різних значеннях параметрів $q, \lambda = \lambda_0/\lambda_1, z_k = 4y_k$. У цьому випадку $A_{2p} = 0$ і для досягнення точності 1% при $|x| \leq 0,95a$ у найнесприятливішому випадку прямокутного ($q = \infty$) абсолютно теплопровідного ($\lambda_0 = \infty$) включення при $|y_k| \leq 0,5a$ досить обмежитися першими 25 відмінними від нуля коефіцієнтами розкладу /5/. Розв'язки $\gamma_2(x)$, одержані при $\lambda = 0,0001$ і $\lambda = 10000$, відрізняються від відповідних аналітичних розв'язків при $\lambda = 0$ і $\lambda = \infty$ менше, ніж на 1%. При довільних значеннях параметрів виконується нерівність

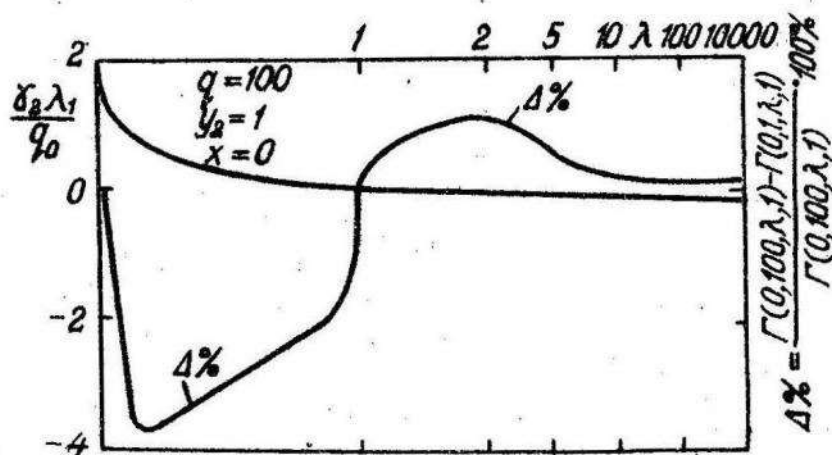
$$m_k \operatorname{sign}(y_k) (\lambda_0 - \lambda_1) \gamma_2(x) \geq 0.$$


Рис. 4.

Слід зауважити, що скачок $\gamma_2(x)$ не зміниться, якщо стік тепла у точці z_k замінити на джерело тепла тієї ж потужності у точці $\bar{z}_k$.

Якщо позначити через $\Gamma(x, q, \lambda, y_k)$ значення $\gamma_2(x)$, знайдене для деяких конкретних значень параметрів x, q, λ, y_k , то має місце нерівність $|\Gamma(x', q', \lambda', y_k')| \geq |\Gamma(x'', q'', \lambda'', y_k'')|$

при $|x'| \leq |x''| \leq a$ /рис. I-3/

$q' \geq q'' \geq 1$ /рис.2/

$\lambda' \geq \lambda'' \geq 1$

або $0 \leq \lambda' \leq \lambda'' \leq 1$ /рис. I,4/

$h_0 < |y'_k| \leq |y''_k|$ /рис.3,5/

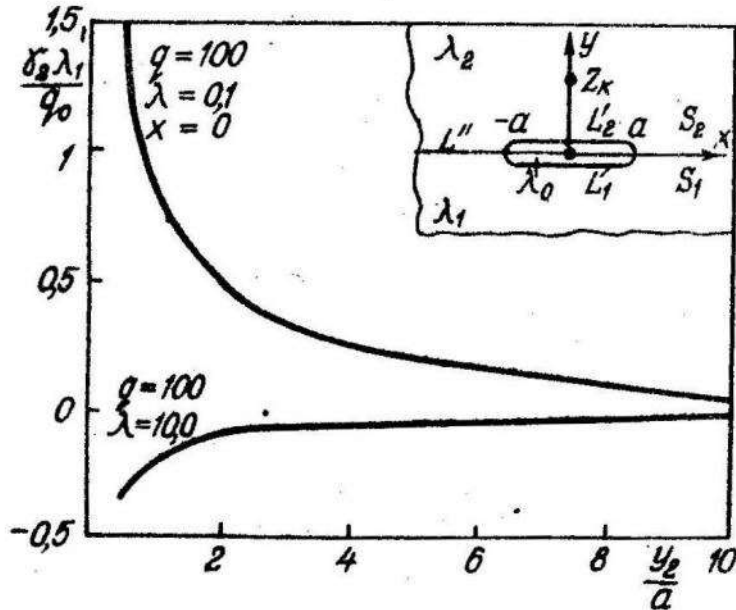


Рис. 5.

Розрахунки показали, що при $|y_k| \leq 0,75a$ починає проявлятися локальність нагріву включення /рис.3/.

Скачок температури по центру включення $\delta_2(0)$ при варіюванні форми включення від еліптичної до прямокутної змінюється не більше, ніж на 3,75%. Ця різниця максимальна при $\lambda = 0,2$ і прямує до нуля, коли $\lambda \rightarrow 0$ і $\lambda \rightarrow \infty$ /рис.4/. Чим менше значення λ , тим менше впливає форма включення на скачок температури, і для теплоізолюваного /теплонепроничного/ включення скачок температури не залежить від форми.

Список літератури: 1. Абдурахманов И.М., Алибеков Б.Г. О влиянии периодической системы тонких включений на плоское стационарное температурное поле. - Инженерно-физический журнал, 1977, т.32, № 3. 2. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. -

Прикладная математика и механика, 1970, т.34, № 3. 3. М у с х е -
л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: 1968.
4. П о б е р е ж н ы й О.В., К и т Г.С. Об определении температур-
ного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте
между ними. - Инженерно-физический журнал, 1968, т.15, № 4. 5. К а н -
т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего
анализа. - М.: Физматгиз, 1962. 6. С у л и м Г.Т. Регулярність де-
яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. - Вісник Львів. ун-ту,
серія мех.-мат., 1975, вип.10.

З М І С Т

С т а с и ш и н В.М. Методологічні основи математизації теоретичного знання.....	3
Б а р т і ш М.Я., Н і к о л ь с ь к и й Ю.В. Градієнтно-параметричний метод мінімізації функцій.....	10
М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д., Ш і п к а Й.Г. Про метод Шварца для бігармонічного рівняння.....	14
К в і т І.Д. Про розщеплення однієї абсолютно неперервної випадкової змінної на добуток двох незалежних сингулярних випадкових змінних.....	19
О щ и п к о Л.Й. Оптимізація складових оболонок електровакуумних приладів.....	23
Ш ж н к а р е н к о Г.А., Г р и г о р я н С.С., Д и я к І.І. Чисельне дослідження нестационарного конвективного осесиметричного теплообміну методом скінченних елементів.....	26
Б е р е ж а н с ь к а З.С., П р о к о п о в и ч І.Б. Чисельний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для простору з циліндричними тріщинами.....	32
О с т у д і н Б.А., К і р і к О.Є. Чисельний розв'язок одного класу задач електростатики з використанням методу Боголюбова-Крилова.....	36
Б а к а л е ц ь В.А., П у ч к а В.А. Чисельна реалізація розв'язування граничних задач методом неозначених коефіцієнтів.....	40
Г р и л і ц ь к и й Д.В., О н и щ у к В.Я. Нестационарна взаємодія сферичної оболонки з акустичною хвилею тиску.....	43
Г р и л і ц ь к и й Д.В., Ш е л е с т о в с ь к и й Б.Г. Квазістационарна температурна задача теорії пружності для ізотропного шару.....	49
О н и щ у к В.Я. Акустичне поле від суцільної пружної сфери.....	54
М о к р и к Р.І., П и р " в Ю.О. Дисперсійне рівняння для пружного шару, що лежить на акустичному півпросторі.....	60

О п а н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. Кручення плити з тонкостінним прямолінійним включенням.....	64
Д р а г а н М.С. Згин консольної балки з прямоліній- ним пружним включенням.....	69
Б а р в і н с ь к и й А.Ф., Д у д з я н и й І.М. Нелінійні поздовжні коливання балки зі змінними параметра- ми.....	75
П і с к о з у б Й.З., С у л и м Г.Т. Вплив лінійно- го включення на температурне поле від джерела тепла.....	80

УДК 518

Методологические основы математизации теоретического знания.

С т а с и ш и н В.М. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с.3 - 10 /на укр.яз./.

Рассматриваются некоторые особенности современной математики, ее роль и функции в познании. Показано, что применение математических средств в других науках ведет к более глубокому познанию явлений природы и социальной действительности при условии их использования на основе диалектико-материалистического мировоззрения и методологии, учета качественных особенностей, закономерностей исследуемых объектов.

Список лит.: 6 назв.

УДК 518:517.948

Градиентно-параметрический метод минимизации функций. Б а р - т и ш М.Я., Н и к о л ь с к и й Ю.В. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа, Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с.10-13. /на укр. яз./.

Предложен численный метод минимизации функций, являющийся модификацией многошагового градиентного метода. Обоснован выбор параметра и указана целесообразность применения предложенного метода. Приведены результаты численных экспериментов, свидетельствующие об ускорении сходимости при уменьшении общего количества вычислений. Табл. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.944:947

О методе Шварца для бигармонического уравнения. М а р т ы н е н - к о Мария Д., М а р т ы н е н к о Михаил Д., Ш и п к а И.Г. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с.14-18. /на укр. яз./.

Дается применение метода Шварца для построения бигармонических функций с заданными особенностями на фиксированных многообразиях. Список лит.: 4 назв.

УДК 519.21

О расщеплении одной абсолютно непрерывной, случайной величины на произведение двух независимых сингулярных случайных величин.

К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 19-23 /на укр.яз./.

Доказывается, что произведение счетного количества независимых двухзначных случайных величин может быть абсолютно непрерывной или сингулярной случайной величиной. Произведение двух независимых сингулярных случайных величин может быть абсолютно непрерывной случайной величиной.

Список лит.: 1 назв.

УДК 539.3

Оптимизация составных оболочек электровакуумных приборов.

О щ и п к о Л.И. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 23-26 /на укр. яз./.

Решается задача оптимизации конструкции, состоящей из двух сферических и двух цилиндрических оболочек. Целевой функцией служит объем конструкции. Ограничения накладываются на максимальные растягивающие напряжения и некоторые геометрические параметры. Задача оптимального проектирования с помощью численных методов сводится к задаче геометрического программирования. Приведены полученные результаты.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.958:681.3.057

Численное исследование нестационарного конвективного осесимметрического теплообмена методом конечных элементов. Ш и н к а р е н - к о Г.А., Г р и г о р я н С.С., Д ы я к И.И. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 26-31 /на укр.яз./.

Для решения задач теплообмена построен алгоритм метода конечных элементов, использующий линейную аппроксимацию температуры по пространственным координатам в пределах треугольников. Приведен явный вид соотношений метода, которые получены на основании процесса Галеркина с привлечением схемы Кранка-Николсона по времени. Матрица системы разностных уравнений факторизуется по методу Холецкого, и тем самым определение температуры на каждом временном шаге сводится к выполнению обратных подстановок. Рассмотрены числовые примеры.

Табл. 1. Ил. 2. Список лит.: 6 назв.

УДК 539.377

Численное решение нестационарной задачи теплопроводности для пространства с цилиндрическими щелями. Б е р е ж а н с к а я З.С., П р о к о п о в и ч И.Б. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 32-36 /на укр.яз./.

Рассмотрена первая краевая задача для уравнения теплопроводности в пространстве со щелями. С помощью теплового потенциала простого слоя задача сведена к решению интегрального уравнения первого рода. Предложен алгоритм, автоматизирующий решение этой задачи. Рассмотрен численный пример расчета температурного поля в пространстве с цилиндрическими щелями.

Ил. 2. Список лит.: 3 назв.

УДК 518.517.948

Численное решение одного класса задач электростатики с использованием метода Боголюбова-Крылова. О с т у д и н Б.А., К и р и к О.Е. - Вестн. Львов.ун-та, сер.мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов.: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 36-40 /на укр.яз./.

Рассматривается задача о распределении электрических зарядов на совокупности тонких незамкнутых проводящих поверхностях. Поставленная задача формулируется в виде двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, которое решается методом Боголюбова-Крылова.

Ил. 1. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.949.8

Численная реализация решения граничных задач методом неопределенных коэффициентов. Б а к а л е ц В.А., П у ч к а В.А. - Вестн. Львов.ун-та, сер.мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1980, с. 40-43 /на укр.яз./.

Рассматривается численная реализация одного точного метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона на плоскости в случае эллипса, когда правая часть уравнения является алгебраическим полиномом произвольной степени.

Список лит.: 1 назв.

УДК 532.582

Нестационарное взаимодействие сферической оболочки с акустической волной давления. Г р и л и ц к и й Д.В., О н и щ у к В.Я. - Вестн.Львов.ун-та, сер.-мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа, Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 43-49 /на укр.яз./.

Численно-аналитическим путем получено решение нестационарной задачи о взаимодействии упругой сферической оболочки, погруженной в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, с акустической волной давления конечной длительности при наличии заполнителя внутри оболочки. Численные результаты приведены для перемещений срединной поверхности оболочки в случае действия непрерывной волны давления и волны давления, равной пяти периодам синусоиды.

Ил. 3. Список лит.: 3 назв.

УДК 539. 3

Квазистационарная температурная задача теории упругости для изотропного слоя. Г р и л и ц к и й Д.В., Ш е л е с т о в - с к и й Б.Г. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 49-54 /на укр. яз./.

Рассмотрена квазистационарная задача термоупругости для изотропного слоя, на одной из поверхностей которого движется с постоянной скоростью область с заданной температурой, вне этой области и на другой поверхности слоя происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, которое решалось численно. Рассмотрен числовой пример.

Ил. 2. Список лит.: 3 назв.

УДК 533.6.013.42

Акустическое поле от сплошной упругой сферы. О н и щ у к В.Я. -
Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и приклад-
ные вопросы математического анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при
Львов. ун-те, 1980, с. 54-60 /на укр. яз./.

Решена краевая задача гидроакустики об излучении акустических
волн сплошной упругой сферой, находящейся в бесконечной акустической
среде под воздействием сосредоточенного силового импульса. Приводят-
ся численные результаты расчета акустического поля в стационарном и
нестационарном случаях.

Ил. 3. Список лит.: 2 назв.

УДК 533.6.013.42

Дисперсионное уравнение для упругого слоя, лежащего на акусти-
ческом полупространстве. М о к р и к Р.И., П ы р ь е в Ю.О. -
Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и приклад-
ные вопросы математического анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при
Львов. ун-те, 1980, с. 60-64 /на укр. яз./.

Рассматривается дисперсионное уравнение для системы сред, состоя-
щих из упругого слоя, лежащего на акустическом жидком полупространст-
ве, и изучаются свойства его корней.

Ил. 1. Список лит.: 9 назв.

УДК 539.311

Кручение плиты с прямолинейным тонкостенным включением. О п а -
н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер.
мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического
анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1980, с. 64-69
/на укр. яз./.

Исследуется задача о кручении плиты с прямолинейным упругим
включением конечной длины. Разрешающая система интегродифференциаль-
ных уравнений типа Прандтля сводится к бесконечной системе линейных
алгебраических уравнений. Приведены формулы для определения напряжен-
ного состояния в окрестности конца включения, а также графики для
коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от относитель-
ной жесткости включения и плиты.

Ил. 2. Список лит.: 5 назв.

УДК 539.311

Изгиб консольной балки с прямолинейным упругим включением.

Д р а г а н М.С. – Вестн. Львов.ун-та, сер.мех.-мат., вып.16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.–Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 69–75 /на укр. яз./.

Исследуется задача об изгибе консольной балки /пластины/ с прямолинейным упругим включением конечной длины. С помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили решение задачи сведено к системе двух интегродифференциальных уравнений типа Прандтля, пригодной для любой жесткости включения: от нерастяжимого до абсолютно податливого /разреза/. Приведены формулы для определения напряженного состояния в окрестности конца включения, а также графики коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от относительной жесткости включения и балки.

Ил. 3. Список лит.: 4 назв.

УДК 534.111

Нелинейные продольные колебания балки с переменными параметрами. Б а р в и н с к и й А.Ф., Д у д з я н и й И.М. – Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.–Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 75–80 /на укр. яз./.

Предложена методика исследования продольных колебаний балки с переменными параметрами при учете рассеивания энергии в материале. Для решения задачи использован асимптотический метод.

Список лит.: 6 назв.

УДК 536.24

Влияние линейного включения на температурное поле от источника тепла. П и с к о з у б И.З., С у л и м Г.Т. – Вестн. Львов.ун-та, сер.мех.-мат., вып. 16. Теоретические и прикладные вопросы математического анализа.–Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1980, с. 80–87 /на укр. яз./.

Рассматривается плоская стационарная задача теплопроводности без учета теплоотдачи через боковые поверхности для составного тела с тонкостенными прослойками на границе раздела материалов в случае наличия источника тепла в одной из полуплоскостей. Методами теории функций комплексной переменной решение задачи сведено к сингулярному интегродифференциальному уравнению. Определен скачок возмущенного температурного поля на включениях. Для некоторых частных случаев приведены точные решения задачи. Приводятся результаты численного анализа.

Ил.5.Список лит.:6 назв.

Вестник Львовского университета

Выпуск I6

Серия механико-математическая
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

/На украинском языке/

Львов

Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.Войтович

Художний редактор Н.М.Чишко

Технічний редактор А.А.Степанюк

Коректор Л.С.Ведмідь

Підп. до друку 17.09.79 . БГ13042 . Формат 60x90 I/I6.

Папір друк. № 3. Офс. друк. 6 умовн. друк. арк. 4,78 обл.-вид. арк.

Тираж 600 прим. Вид. № 676. Зам. 4872. Ціна 60 коп. Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об'єднання "Вища школа". 290000, Львів,
вул. Університетська, I.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління
в справах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі.
290000, Львів, вул. Стефаника, II.

60 коп.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1980, вип. 16, 1—96.