УДК 518:517.948

П.С.Сеньо

СТІЙКІСТЬ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Кожен обчислювальний процес, який реалізують на дискретному обчислювальному пристрої, поряд з похибкою методу дає неусувну похибку, що виникає внаслідок похибок вихідних даних і вимірювань, та похибку заокруглень, яку одержуємо тому, що обчислювальні пристрої містять скінченну кількість розрядів. Ці похибки можна розглядати як певні збурення вихідного ідеального обчислювального процесу. Коли незалежно від цих збурень при реалізації обчислювального процесу отримуємо правильний результат, то такий процес називаємо стійким.

Для розв"язування нелінійних операторних рівнянь [4]

$$P(x) = 0, \qquad /1/$$

де P – нелінійний оператор, що діє з одного банахового простору в інший, запропоновано обчислювальний алгоритм

$$\begin{cases} z_n = x_n - \Gamma_n P(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \{2J - [P(z_n, x_n)]^{-1} P'(x_n)\}^{-1} \Gamma_n P(x_n). \end{cases} \qquad /2/$$

Тут $\Gamma_n = \Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$, $P(z,x)$ – перша поділена різниця [6] оператора $P(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$

Нехай на процес /2/ діють збурення, які є послідовностями лінійних операторів $\{V_n\}$ і $\{\tilde{V}_n\}$, так, що

$$z_n = x_n - \tilde{\Gamma}_n P(x_n),$$
$$x_{n+1} = x_n - \{2J - [P(z_n, x_n)]^{-1} P'(x_n) + V_n\}^{-1} \tilde{\Gamma}_n P(x_n), \qquad /3/$$

де $\tilde{\Gamma}_n = [P'(x_n) + \tilde{V}_n]^{-1}$, $n = 0,1,\ldots$

Достатні умови існування розв"язку рівняння /1/ й умови збіжності процесу /3/ дає така теорема.

Т е о р е м а 1. Нехай виконуються умови:

1/ для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \le B_0$, $\|P'(x_0)\| \le K_0$;

2/. $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$;

3/ в області $\Omega_0 = \{x : \|x - x_0\| \leq \rho_0\}$, де $\rho_0 = \frac{\eta_0}{(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)(1-h_0^3 \ell_0^3)}$,
$\|P''(x)\| \leq M$, $\|P'''(x)\| \leq N$ і $P'''(x)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|P'''(x'') - P'''(x')\| \leq L \cdot \|x'' - x'\|;$$

4/ $\|\tilde{V}_n\| \leq \tilde{C} \cdot \eta_n^3$, $\|V_n\| \leq C \cdot \eta_n^3$;

5/ $h_0 = B_0 M \eta_0$, $h_0 < (1-q_0)(1-\varkappa_0^3)$, де $q_0 = \frac{h_0}{2(1-\varkappa_0^3) - h_0} + C \cdot \eta_0^3$, $\varkappa_0^3 = \tilde{C} B_0 \eta_0^3$;

6/ $q_0 < 1$, $\varkappa_0^3 < 1$;

7/ $S_0^3 = \ell_0^3 h_0^3 / [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)] < 1$,

де

$$\ell_0^3 = \frac{1}{M^3 \cdot B_0 [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3) - h_0]} \left\{ \frac{m_0 N}{6(1-\varkappa_0^3)^2 (1-q_0)^2} (2 + m_0 \eta_0) + \frac{N M \tilde{B}_0}{12(1-\varkappa_0^3)^3} + (1 + m_0 \eta_0) \tilde{C} \eta_0 + \right.$$

$$\left. + K_0 C + \frac{M C \eta_0}{2(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)} + m_0 \left[\frac{M^2 \tilde{B}_0}{4(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)^2} + \frac{L \cdot \eta_0}{24(1-q_0)^3 (1-\varkappa_0^3)^3} + \frac{M \cdot \tilde{B}_0 \cdot N \cdot \eta_0}{12(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)^3} \right] \right\},$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{2(1-\varkappa_0^3) B_0}{2(1-\varkappa_0^3) - h_0}; \quad m_0 = \frac{\tilde{B}_0 M}{2(1-\varkappa_0^3)} + C \eta_0^2.$$

Тоді рівняння /I/ в області Ω_0 має розв"язок, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за допомогою /3/, причому

$$\|x^* - x_n\| \leq [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)]^{n-1} S_0^{4^n-1} \cdot \frac{\eta_0}{1 - h_0^3 \ell_0^3}. \qquad /4/$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідних теорем з праць [2, 4, 5].

Поряд з рівнянням /I/ розглянемо збурене рівняння

$$P_\varepsilon(x) = 0. \qquad /5/$$

Оператор P_ε вважаємо близьким до оператора P в тому сенсі, що в деякій області Ω $\|P_\varepsilon(x) - P(x)\| \leq \delta(\varepsilon, x)$, де функція $\delta(\varepsilon, x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $x \in \Omega$. Застосуємо процес /3/ до рівняння /5/. Тоді має місце така теорема.

Т е о р е м а 2. Нехай для оператора $P_\varepsilon(x)$ виконуються умови 2/–7/ теореми I. Крім того, припускаємо, що рівняння /I/ має хоча б один розв"язок $x^* \in \Omega \subset \Omega_0$, $\|P(\bar{x}, x)\| \leq B$, $\forall x, \bar{x} \in \Omega_0$.

Тоді при $n \to \infty$ і $\varepsilon \to 0$ процес /3/ збігається до одного з розв"язків рівняння /I/, який належить області Ω_0, причому

$$\|x_\varepsilon^{(n)} - x^*\| \leq [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)]^{n-1} S_0^{4^n-1} \cdot \frac{\eta_0}{1 - h_0^3 \ell_0^3} + B \cdot \delta(\varepsilon, x^*). \qquad /6/$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2 з праці [5].

Аналогічно, як у праці [I], за допомогою функції $\delta(\varepsilon, x)$ можна враховувати похибку заокруглень і неусувну похибку. Отже, процес /2/ стійкий у тому сенсі, що похибки заокруглень, якщо вони не дуже великі, не порушують його збіжності та не змінюють порядку збіжності.

Розглянемо обчислювальний процес

$$\begin{cases} z_n = x_n - [P(\tilde{x}_n, x_n)]^{-1} P(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \{2 \cdot J - [P(z_n, x_n)]^{-1} P(\tilde{x}_n, x_n)\}^{-1} [P(\tilde{x}_n, x_n)]^{-1} P(x_n) \ (n = 0, 1, \ldots), \end{cases} \qquad /7/$$

який є різницевим аналогом процесу /2/.

Легко показати, що процес /7/ є процесом /3/, де збурення

$$\tilde{V}_n = \int_0^1 P''(x_n + \tau(\tilde{x}_n - x_n))(1-\tau)\, d\tau\, (\tilde{x}_n - x_n), \qquad /8/$$

$$V_n = -[P(z_n, x_n)]^{-1} \tilde{V}_n. \qquad /9/$$

Отже, достатні умови існування розв"язку рівняння /I/ і умови збіжності процесу /7/ дає така теорема.

Т е о р е м а 3. Нехай виконуються умови I/ – 3/ теореми I при $\rho_0 = \eta_0 / [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)(1-h_0^3 l_0^3)$. Крім того, виконуються ще й такі умови:

I/ на кожному кроці $\tilde{x}_n$ вибираємо з умови $\|\tilde{x}_n - x_n\| \le 2C \|\Gamma_n P(x_n)\|^3$;

2/ $h_0 = B_0 M \eta_0$, $h_0 < (1-q_0)(1-\varkappa_0^3)$, де $q_0 = \dfrac{h_0}{2(1-\varkappa_0^3) - h_0} + \tilde{B}_0 M C \eta_0^3$;

3/ $q_0 < 1$, $\varkappa_0^3 = B_0 M C \eta_0^3 < 1$;

4/ $S_0^3 = l_0^3 h_0^3 / [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)] < 1$, де

$$l_0^3 = \frac{1}{M^2 B_0^3 [(1-q_0)(1-h_0) - h_0]} \left\{ m_0 \left[\frac{M^2 \cdot \tilde{B}_0}{4(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)^2} + \frac{L \cdot \eta_0}{24(1-q_0)^2(1-\varkappa_0^3)^3} + \frac{M \cdot \tilde{B}_0 N \cdot \eta_0}{12(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)^3} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{N m_0}{6(1-q_0)^2(1-\varkappa_0^3)^2}(2 + \eta_0 m_0) + \frac{N M \tilde{B}_0}{12(1-\varkappa_0^3)^3} + K_0 M \tilde{B}_0 C + (1 + \eta_0 m_0) C M \eta_0 + \frac{M^2 \cdot C \cdot \tilde{B} \cdot \eta_0}{2(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)} \right\}.$$

Тоді /I/ має в області Ω розв"язок, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за /7/, причому

$$\|x^* - x_n\| \le [(1-q_0)(1-\varkappa_0^3)]^{n-1} \cdot S^{4^n - 1} \cdot \frac{\eta_0}{1 - h_0^3 l_0^3}.$$

Доведення цієї теореми є перевіркою виконання умов теореми I при конкретних збуреннях /8/, /9/.

З а у в а ж е н н я I. Умови теореми 3 значно спрощуються, якщо на кожному кроці ітерації $\tilde{x}_n$ вибираємо з умови

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq 2M^2 B_n^2 \cdot \tilde{\gamma}_n^2 . \qquad /10/$$

З а у в а ж е н н я 2. З теореми I випливає, що метод /2/ є збуреним аналогом однопараметричного сімейства методів типу Рунге [3] зі збуреннями, які не знижують порядку їх збіжності.

Справді, метод /2/, як і методи типу Рунге, містить лише похідні першого порядку, порядки збіжності цих методів дорівнюють чотирьом, оператор $P(x_0) + P'(x_0)\{2J - [P(z_0, x_0)]^{-1} P'(x_0)\}(x - x_0)$ збігається з оператором $P(x)$ також з точністю $O(\|x - x_0\|^4)$.

Список літератури: I. Б а б и ч М.Д., И в а н о в В.В. Оценка полной погрешности при решении нелинейных операторных уравнений методом простой итерации. - ЖВМиМФ, 1967, 5, № 5. 2. Б а р т и ш М.Я. Возмущенные аналоги методов типа Ньютона-Канторовича. - В кн.: Математический сборник, Киев: Наукова думка, 1976. 3. Б а р т и ш М.Я., С е н ь о П.С. О методе Рунге решения нелинейных операторных уравнений третьего и четвертого порядка сходимости. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28. 4. Б а р т и ш М.Я., С е н ь о П.С., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационно-разностный метод для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 29. 5. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Исследование условий сходимости и оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28. 6. У л ь м С.Ю. Об обобщенных разностях. I.-Изв. АН Эст.ССР. Физика. Математика, 1967, 16, № I.

Стаття надійшла в редколегію 10.09.1979 р.