УДК 518:517.9:533.7

П.С.Сеньо, С.М.Шахно

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ ТИПУ РУНГЕ

Системи різницевих рівнянь газової динаміки у загальному випадку є системами нелінійних алгебраїчних рівнянь великих розмірів. При виборі ітераційного методу розв"язування таких систем необхідно, щоб вибраний метод накладав слабкі обмеження на крок сітки /це суттєво зменшує розмірність системи/ і мав досить високий порядок збіжності.

Методи типу Рунге [1, 2] належать до методів високих порядків збіжності і містять лише значення першої похідної оператора системи та довільні параметри. Власне вибором значень цих параметрів, як показано нижче, можна добитися стійкості всіх внутрішніх методів й одночасно найслабших з можливих обмежень на крок сітки по часу.

Доведемо, що метод типу Рунге

$$x_{n+1} = x_n - U_n^{-1} \Phi(x_n), \; n = 0, 1, \dots, \qquad /I/$$

де $\Phi(x)$ - оператор лівої частини системи рівнянь $\Phi(x) = 0$;

$$U_n = (1-\beta)\Phi'(x_n) + \beta\Phi'(x_n - \tfrac{1}{2\beta}\Gamma_n\Phi(x_n)), \; \Gamma_n = [\Phi'(x_n)]^{-1};$$

$\beta \neq 0$ - довільне дійсне число, для розв"язування різницевої схеми газової динаміки в ізотермічному наближенні

$$v_t = -p_{\xi}^{(\sigma)}; \; x_t = v^{(0,5)}; \; x_s = \frac{1}{\rho}; \; p = P(\rho); \; \sigma \geq 0,5, \qquad /2/$$

вимагає значно слабших обмежень на крок сітки за часом ніж у методі простої ітерації, і дещо жорсткіших, як у методі Ньютона [4, 5]. У випадку слабких хвиль, близьких до акустичних, обмеження, як і для методу Ньютона, практично відсутні. Зауважимо, що отримані далі оцінки на крок за часом мають достатній характер. Як свідчать розрахунки на ЕОМ, метод Рунге збігається з кроком τ не меншим, ніж метод Ньютона. Метод типу Рунге /I/ в застосуванні до системи нелінійних різницевих рівнянь /2/ при $|\beta| > \frac{1}{2}$ має третій порядок збіжності, тоді як метод простої ітерації збігається зі швидкістю геометричної прогресії, а метод Ньютона – квадратично. Отримані конкретні прості умови вибору оптимальних значень параметра β .

Далі дотримуємось позначень, прийнятих у роботах А.А.Самарського і Ю.П.Попова [4, 5].

Для визначення невідомих сіткових функцій v, x, p, ρ на $j+1$ -му шарі застосуємо до системи /2/ метод Рунге /І/. Тоді отримуємо систему лінійних рівнянь, яка зводиться до триточкового рівняння

$$A_i \delta v_{i-1} - C_i \delta v_i + B_i \delta v_{i+1} = -F_i \ , \ i = 1, 2, \dots, N-1 . \qquad /3/$$

Коефіцієнти /3/ A_i, B_i, C_i, F_i залежать від номера ітерації k і обчислюються за наступними формулами:

$$\overset{k}{A}_i = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \left[(1-\beta)P'(\overset{k}{\rho}_{i-1}) + \beta P'(\overset{k}{\hat\rho}_{i-1})\right] \frac{\overset{k}{\rho}{}^2_{i-1}\,\overset{k}{\hat\rho}{}^2_{i-1}}{(1-\beta)\overset{k}{\hat\rho}{}^2_{i-1} + \beta \overset{k}{\rho}{}^2_{i-1}} ,$$

$$\overset{k}{B}_i = \overset{k}{A}_{i+1} \ , \ \overset{k}{C}_i = 1 + \overset{k}{A}_i + \overset{k}{B}_i \ ,$$

$$\overset{k}{F}_i = -\overset{k}{f}_{1,i} + \sigma\tau \left\{ \overset{k}{f}_{4,i} + \left[(1-\beta)P'(\overset{k}{\rho}_i) + \beta P'(\overset{k}{\hat\rho}_i)\right] \overset{k}{Y}_i \right\}_{\bar s} , \qquad /4/$$

$$\overset{k}{Y}_i = \frac{\overset{k}{\rho}{}^2_i\,\overset{k}{\hat\rho}{}^2_i}{(1-\beta)\overset{k}{\hat\rho}{}^2_i + \beta \overset{k}{\hat\rho}{}^2_i} \left[\overset{k}{f}_{3,i} - (\overset{k}{f}_2)_{s,i} \right] .$$

Значення функцій $\overset{k}{\rho}_i$, наявних у /4/, визначаються однією ітерацією за методом Ньютона з параметром релаксації $\frac{1}{2\beta}$.

Триточкове рівняння /3/ можна розв"язати методом прогонки. Умови стійкості прогонки виконуються, очевидно, принаймні для $0 < \beta \leq 1$.

Доведемо збіжність методу /І/ у застосуванні до системи рівнянь /2/. Для простоти обмежимось розглядом ідеального газу

$$p = P(\rho) = c^2 \rho \ , \quad c = const.$$

Застосувавши звичайну процедуру [4,5] і врахувавши позначення $\Delta y = \overset{k+1}{y} - y^{j+1} = \overset{k+1}{y} - \hat{y}$, одержуємо

$$\left(\frac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}\right)\Delta\overset{\kappa+1}{\rho}-0{,}5\sigma c^2\tau^2\Delta\overset{\kappa+1}{\rho}_{\bar s s}=\left(\frac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}-\frac{1}{\overset{\kappa}{\bar\rho}\overset{\wedge}{\rho}}\right)\Delta\overset{\kappa}{\rho}. \qquad /5/$$

Запишемо /5/ в індексній формі

$$\left(\frac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}_i^2}+\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}_i^2}+\frac{2a^2}{h^2}\right)\overset{\kappa+1}{Z}_c-\frac{a^2}{h^2}\left(\overset{\kappa+1}{Z}_{i-1}+\overset{\kappa+1}{Z}_{i+1}\right)=\left(\frac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}_i^2}+\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}_i^2}-\frac{1}{\overset{\kappa}{\bar\rho}_i\overset{\wedge}{\rho}_i}\right)\overset{\kappa}{Z}_i, \qquad /6/$$

де $a^2=0{,}5\sigma c^2\tau^2$, $\overset{\kappa+1}{Z}=\Delta\overset{\kappa+1}{\rho}$.

Якщо розглядати задачі, де в граничних точках $i=-1$, $i=N$ – задані режими зміни тиску з часом, то можна отримати крайові умови для /6/

$$\overset{\kappa+1}{Z}_{-1}=0,\quad \overset{\kappa+1}{Z}_N=0. \qquad /7/$$

До неоднорідного рівняння /6/ з однорідними крайовими умовами /7/ можна застосувати принцип максимуму, з якого випливає

$$\|\overset{\kappa+1}{Z}\|_c\le\left\|\frac{\dfrac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\dfrac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}-\dfrac{1}{\overset{\kappa}{\bar\rho}\overset{\wedge}{\rho}}}{\dfrac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\dfrac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}}\overset{\kappa}{Z}\right\|_c\le\left\|\frac{\dfrac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\dfrac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}-\dfrac{1}{\overset{\kappa}{\bar\rho}\overset{\wedge}{\rho}}}{\dfrac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\dfrac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}}\right\|_c\|\overset{\kappa}{Z}\|_c, \qquad /8/$$

якщо виконується умова

$$D=\frac{1-\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}>0. \qquad /9/$$

Щоб зробити оцінку /8/ більш явною, розкладемо вираз $\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\bar\rho}{}^2}=\frac{\beta}{(\overset{\kappa}{\rho}-\frac{\overset{\kappa}{\alpha}}{2\beta})^2}$ у ряд Тейлора в околі точки $\overset{\kappa}{\rho}$. Для цього розкладу, записавши залишок ряду в інтегральній формі Коші, достатньо двох перших членів. Обчисливши відповідний інтеграл, отримаємо

$$\frac{\beta}{(\overset{\kappa}{\rho}-\frac{\overset{\kappa}{\alpha}}{2\beta})^2}=\frac{\beta}{\overset{\kappa}{\rho}{}^2}+\frac{\overset{\kappa}{\alpha}}{\overset{\kappa}{\rho}{}^3}+\frac{\beta a^2(3\overset{\kappa}{\rho}-a)}{\overset{\kappa}{\rho}{}^3(\overset{\kappa}{\rho}-a)^3}, \qquad /10/$$

де $a=\frac{\overset{\kappa}{\alpha}}{2\beta}$.

Значення $\overset{\kappa}{\alpha}$, яке входить у /10/, знаходимо, міркуючи таким чином. Нехай дано систему нелінійних рівнянь, записану в операторному вигляді

$$P(x)=0,$$

де $P: E_n\to E_n$ – достатня кількість разів диференційованого оператора. Для даного операторного рівняння існує рівність

$$\overset{\kappa}{a} = \Gamma_\kappa P(x_\kappa) = \overset{\kappa}{x} - x - \Gamma_\kappa \int_0^1 P''(\overset{\kappa}{x} + \theta(x - \overset{\kappa}{x}))(1-\theta)\,d\theta \cdot (x - \overset{\kappa}{x})^2, \qquad /11/$$

де $\Gamma_\kappa = [P'(\overset{\kappa}{x})]^{-1}$.

Застосувавши /11/ до системи газодинамічних рівнянь /1/ і врахувавши, що всі другі частинні похідні, крім $\frac{\partial^2 f_{3,i}}{\partial \rho_i^2}$, дорівнюють нулю, а $\frac{\partial^2 f_{3i}}{\partial \rho_i^2} = -\frac{2}{\rho_i^3}$, отримаємо, що $\overset{\kappa}{a}_i$ у /10/ визначається за формулою

$$\overset{\kappa}{a}_i = \overset{\kappa}{\rho}_i - \hat{\rho}_i + 2\Big[\Gamma_\kappa \int_0^1 \frac{1-\theta}{[\hat{\rho} + \theta(\hat{\rho} - \overset{\kappa}{\rho})]^3}\,d\theta\Big]_i^2 (\overset{\kappa}{\rho}_i - \hat{\rho}_i)^2 = \overset{\kappa}{\rho}_i - \hat{\rho}_i + \Big[\Gamma_\kappa \frac{1}{\hat{\rho}\overset{\kappa}{\rho}^2}\Big]_i (\overset{\kappa}{\rho}_i - \hat{\rho}_i)^2, \qquad /12/$$

де Γ_κ – матриця, обернена до матриці

$$C_{33} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\overset{\kappa}{\rho}_0^2} + 3a & -a & & 0 \\ -a & \frac{1}{\overset{\kappa}{\rho}_1^2} + 2a & -a & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & -a & \frac{1}{\overset{\kappa}{\rho}_{N-1}^2} + 2a \end{pmatrix}, \quad a = 0{,}5 \cdot 6\left(\frac{C \cdot \tau}{h}\right)^2.$$

Матрицю C_{33} можна отримати при знаходженні методом кліток оберненої матриці до P', де P – оператор лівої частини системи рівнянь /2/.

Якщо підставимо /10/, /12/ у нерівність /8/, то

$$\|\overset{\kappa+1}{z}\|_c \le q_\kappa \|\overset{\kappa}{z}\|_c^3, \qquad /13/$$

де

$$q_\kappa = \left\| \frac{1 - \overset{\kappa}{d}\hat{\rho}}{\hat{\rho}(\hat{\rho} + \overset{\kappa}{z} + \overset{\kappa}{a}\overset{\kappa}{z}^2)} \right\|_c; \ \overset{\kappa}{d} = \overset{\kappa}{b} - \frac{(1 + \overset{\kappa}{b}\overset{\kappa}{z})^2(-3\beta\hat{\rho} + \overset{\kappa}{z} + \overset{\kappa}{b}\overset{\kappa}{z}^2)}{(2\beta\hat{\rho} - \overset{\kappa}{z} - \overset{\kappa}{b}\overset{\kappa}{z}^2)^2}; \ \overset{\kappa}{b} = \Gamma_\kappa \frac{1}{\hat{\rho}\overset{\kappa}{\rho}^2}.$$

Позначимо $q = \max_\kappa q_\kappa$. Тоді

$$\|\overset{\kappa+1}{z}\|_c \le q \|\overset{\kappa}{z}\|_c^3. \qquad /14/$$

Умова /14/ після багатократного застосування зводиться до вигляду

$$\|\overset{\kappa+1}{z}\|_c \le (q^{\frac{1}{2}} \|\overset{0}{z}\|_c)^{3^{\kappa+1}-1} \|\overset{0}{z}\|_c.$$

Очевидно, ітераційний процес Рунге збігається, якщо виконується нерівність $q^{\frac{1}{2}} \|\overset{0}{z}\|_c < 1$, яка рівносильна умові

$$q \|\overset{0}{z}\|_c^2 < 1. \qquad /15/$$

З нерівностей /14/, /15/ випливає

$$\|\overset{\kappa+1}{z}\|_c < \|\overset{\kappa}{z}\|_c < \ldots < \|\overset{0}{z}\|_c, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots \qquad /16/$$

Легко показати, що існує нерівність

$$\left\| \frac{1}{1-x} \right\|_c \le \frac{1}{1-\|x\|_c}, \qquad /17/$$

яка справедлива для векторів x таких, що $\|x\|_c < 1$.

Умова /15/ рівносильна співвідношенням

$$q_k \|\overset{0}{z}\|_c^2 < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad /18/$$

Застосувавши /17/ до лівої частини нерівності /18/ і врахувавши /16/, після нескладних перетворень отримаємо умову

$$\left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \|\overset{0}{z}\|_c + \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \left\| \frac{1}{\hat{\rho}} \right\|_c \left(1 + 2\overset{k}{\delta} + \frac{\overset{k}{Q}}{2|\beta|}\right) \|\overset{0}{z}\|_c^2 < 1, \qquad /19/$$

де

$$\overset{k}{\delta} = \|\Gamma_k\|_c \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c^2 ; \quad \overset{k}{Q} = \frac{\left(1 + \overset{k}{\delta} \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \|\overset{0}{z}\|_c\right)^2 \left[3\|\hat{\rho}\|_c + \left(\|\overset{0}{z}\|_c + \overset{k}{\delta} \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \|\overset{0}{z}\|_c^2\right) \frac{1}{|\beta|}\right] \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \|\hat{\rho}\|_c}{\left[1 - \left(\|\overset{0}{z}\|_c + \overset{k}{\delta} \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c \|\overset{0}{z}\|_c^2\right) \frac{1}{2|\beta|} \left\| \frac{1}{\overset{k}{\rho}} \right\|_c\right]^2}$$

Неважко переконатися, що при виконанні нерівності /19/ задовольняється умова /9/, яка є одночасно умовою стійкості методу прогонки, а при $|\beta| \ge \frac{1}{2}$ гарантується не нижче, ніж третій порядок збіжності методу /1/ в застосуванні до розв"язування системи газодинамічних рівнянь /2/. Зауважимо, що вираз $\frac{\overset{k}{Q}}{2|\beta|}$ за рахунок вибору параметра β можна зробити досить малим, а $\|\Gamma_k\|_c < \sqrt{N} \|\overset{k}{\rho}\|_c^2$.

Доцільно припустити [3], і це підтверджується числовими розрахунками, що для того щоб задовольнити нерівність /19/ при довільному k, достатньо вимагати виконання її на нульовій ітерації. За початкове наближення беруть, як правило, значення сіткових функцій з попереднього шару. Тоді /19/ набуде такого вигляду:

$$\|\zeta\|_c \|\rho_t\|_c \tau + \|\zeta\|_c \|\hat{\zeta}\|_c \|\rho_t\|_c^2 \left(1 + 2\delta + \frac{Q}{2|\beta|}\right) \tau^2 < 1, \qquad /20/$$

де $\zeta = \frac{1}{\overset{0}{\rho}}$, $\hat{\zeta} = \frac{1}{\hat{\rho}}$; δ і Q – значення $\overset{k}{\delta}$ і $\overset{k}{Q}$ на нульовій ітерації.

Таким чином, значення параметра β бажано вибирати якомога більшим. При цьому забезпечуються стійкість методу прогонки, високий порядок збіжності методу Рунге і менш жорсткі обмеження на крок сітки за часом.

Розглянемо, до яких обмежень на крок сітки приводить умова збіжності ітерацій /20/ для розрахунку руху ударної хвилі, що виникає у задачі про поршень.

Використовуючи наведені у праці [5] позначення і значення норм функцій, які входять у нерівність /20/, можна отримати оцінку для максимально можливого кроку сітки за часом:

$$0 < \tau < \frac{1}{2}\,\pi_{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}\,\tau_{\kappa_1}\,\frac{\sqrt{1+4\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)}-1}{\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)} . \qquad /2I/$$

З нерівності /2I/ визначаємо співвідношення

$$\xi_p = \frac{\tau}{\tau_{\kappa_1}} < \pi_{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}\,\frac{\sqrt{1+4\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)}-1}{2\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)} < \pi_{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}\,\frac{\sqrt{\left[1+2\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)\right]^2}-1}{2\left(1+2b+\frac{a}{2|\beta|}\right)} = \pi_{\frac{\alpha}{1-\alpha^2}} = \xi_N , \qquad /22/$$

де ξ_p і ξ_N – відповідно величини співвідношень для методу Рунге /I/ і методу Ньютона.

Порівнявши оцінку з праці [5] для найпростішого ітераційного процесу $\frac{\tau}{\tau_{\kappa_1}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ з оцінками /22/, можна зробити висновок, що метод Рунге /I/ вимагає суттєво слабших обмежень на крок сітки за часом, ніж метод простої ітерації, і дещо жорсткіших, ніж метод Ньютона. Однак метод Рунге має порядок збіжності, не нижчий третього.

Як видно з умови /22/, максимальний крок τ залежить від сили хвилі /від значення α /. При $\alpha \to 1$, що відповідає слабким хвилям, які близькі до акустичних, обмеження практично відсутні. При $\alpha \to 0$, що відповідає сильним ударним хвилям, для розрахунку вимагається малий крок τ .

Теоретичні висновки перевіряли розв"язуючи класичну задачу про поршень, який всувається в газ з постійною швидкістю, внаслідок чого виникає ударна хвиля. Вихідні дані задачі для порівняння брали з праці [5]. Результати розв"язування задачі ітераційним методом типу Рунге /I/ порівнювали з результатами, одержаними за методом Ньютона.

Кількість ітерацій за методами типу Рунге та Ньютона

τ	Номер часового шару	Кількість ітерацій					
		Метод Ньютона	Метод типу Рунге				
			β=0,I	β=0,25	β=0,5	β=0,75	β = I
0,I	I	5	4	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	3	3
	3	4	4	4	3	3	3
	4	4	4	4	3	3	3
	5	4	4	3	4	3	3
	6–I5	4	4	3	3	3	3
0,3	I	5	5	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	4	4
	3	5	4	4	4	4	4
	4	5	4	4	4	3	4
	5	5	4	4	4	3	3
	6	5	4	4	4	3	4
	7	5	4	4	4	3	3
	8	5	4	4	4	3	3
0,5	I	5	5	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	4	4
	3	5	4	4	4	4	4
	4	5	4	4	4	4	4
	5	5	4	4	4	3	4
	6	5	5	4	4	4	4

Як видно з таблиці, розрахунки повністю підтверджують всі теоретичні висновки. Коли вибирати $\beta \bar{\in} (0;1]$, то метод /I/ розбігається, як правило, при будь-яких τ. Це зумовлено нестійкістю прогонки. Швидкість збіжності при $\beta \in [0,5;1]$ відповідає теоретичній. Виявилось, що метод Рунге, як і метод Ньютона, збігається для τ, яке набагато перевищує $\tau_{н_1}$. Зокрема, при τ = I,6, коли за один часовий інтервал фронт ударної хвилі просувається на I6 масових інтервалів, методи Рунге і Ньютона збігаються за 4 і 6 ітерацій відповідно. Такий крок недопустимий, звичайно, з точки зору точності. Параметр доцільно вибирати з інтервалу [0,6; 0,9].

Список літератури: I. Бартиш М.Я., Сеньо П.С. О методе типа Рунге для решения нелинейных операторных уравнений. – ДАН УССР, сер. А, I972, № 9. 2. Бартиш М.Я., Сеньо П.С. О методе Рунге решения нелинейных операторных уравнений третьего и четвертого порядка сходимости. – Вычислительная и прикладная математика, I976, вып. 29. 3. Попов Ю.П., Самарская Е.А. О сходимости итерационного метода Ньютона для решения разностных уравнений газовой динамики. – ЖВМиМФ, I977, I7, № 2. 4. Попов Ю.П., Самарский А.А. О методах численного решения одномерных нестационарных задач газовой динамики. – ЖВМиМФ, I976, I6, № 6. 5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, I975.

Стаття надійшла в редколегію I8.I2.I979 р.

УДК 5I8:5I7.9:533.7

С.М.Шахно

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

Для розв"язування задачі, яка розглядається у праці [2], застосовуємо метод [I]

$$x_{n+1} = x_n - [P'(\theta_n)]^{-1} P(x_n), \quad \theta_0 = x_0,$$
$$\theta_i = x_i - \frac{1}{2}[P'(\theta_{i-1})]^{-1} P(x_i), \quad i \geq 1. \qquad /I/$$

Як відомо [I], метод /I/ має порядок збіжності, що дорівнює $1+\sqrt{2}$.

Для реалізації методу /I/ на кожній ітерації необхідно розв"язувати два триточкових рівняння $A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ з однаковими коефіцієнтами A_i, B_i, C_i і різними правими частинами F_i. Це можна здійснити методом прогонки. Легко переконатись, що тоді умови стійкості прогонки