УДК 518:517.948

Ю.М.Щербина

ПРО ОДИН РЕКУРСИВНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ІЗ ЗБУРЕННЯМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Розв"язування нелінійних операторних рівнянь, вокрема нелінійних систем рівнянь з багатьма невідомими, - важлива задача сучасної обчислювальної математики. Задачами, чисельний розв"язок яких зводиться до розв"язування нелінійних систем рівнянь з багатьма невідомими, є двоточкові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, еліптичні крайові задачі, інтегральні рівняння, задачі мінімізації, двовимірні варіаційні задачі тощо.

Найчастіше для розв"язування нелінійних операторних рівнянь застосовують методи ньютонівського типу. Фундаментальною працею з цього питання є стаття Л.В.Канторовича [3]. Користуючись запропонованою Л.В.Канторовичем методикою, досліджено інші методи такого типу, а також їх різницеві аналоги.

У переважній більшості праць, присвячених вивченню методів ньютонівського типу, аналізуються, як правило, класичні умови збіжності методів: вважається, що всі обчислення виконуються точно. Отримані оцінки швидкості збіжності, таким чином, є оцінками похибки методів, що розглядаються.

Широке застосування ЕОМ для розв"язування нелінійних задач вимагає як досліджень властивостей збіжності методів з урахуванням похибок заокруглень, так і побудови обчислювальних схем, що більш ефективні для реалізації на ЕОМ, ніж метод Ньютона.

При чисельній реалізації методів ньютонівського типу на кожному кроці для визначення вектора поправки необхідно розв"язувати одне або у більш загальному випадку декілька лінійних операторних рівнянь. Важливо знати, наскільки стійкий алгоритм відносно як до випадкових похибок в обчисленнях, так і до прийомів, що полягають у заміні об-

обчислювальні формули яким-небудь наближеним методом розв"язування лінійних рівнянь. Для нелінійної системи рівнянь з багатьма невідомими ці прийоми полягають у застосуванні методів розв"язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь під час визначення вектора поправки. При розв"язуванні таких систем доцільно використовувати метод Гаусса з вибором головного елемента. Тоді значення вектора поправки отримують з деякою похибкою, яка зумовлена заокругленнями при виконанні арифметичних операцій на ЕОМ. У праці [4] показано, що розв"язок, обчислений методом Гаусса з вибором головного елемента, точно задовольняє систему рівнянь зі збуреною матрицею. Більше того, норма збурення не перевищує деякого числа, яке можна обчислити, і що його містить у ролі співмножника добуток одиничної похибки заокруглень на норму матриці системи. Оцінка норми збурення не залежить від правої частини лінійної системи.

У зв"язку з цим для дослідження властивостей збіжності обчислювальних методів доцільно розглядати варіанти алгоритмів із збуреннями [I]. Ми розглянемо рекурсивний метод, який можна отримати на основі теореми, сформульованої у праці [2].

Нехай дано нелінійне операторне рівняння

$$P(x) = 0, \qquad /I/$$

де оператор P переводить елементи банахового простору X в елементи банахового простору Y. Надалі вважатимемо, що оператор P у деякому околі розв"язку x^* рівняння /I/ має необхідну кількість обмежених похідних за Фреше і оператор $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ існує обмежений.

Приймемо в теоремі I з праці [2].

$$\Omega(x) = x - \Gamma(x) P(x).$$

Нехай оператор $\Phi(x)$ породжує ітераційну формулу порядку φ. Для $H(x) = [P'(x - \Gamma(x) P(x))]^{-1}$ неважко дістати

$$\| [P'(\Phi(x_n))]^{-1} - [P'(x_n - \Gamma(x_n) P(x_n))]^{-1} \| = O(\| x_n - x^* \|^2).$$

Отже, за теоремою I із праці [2] порядок збіжності ітераційного методу, який породжується оператором

$$Q(x)=\Phi(x)-[P'(x-\Gamma(x)P(x))]^{-1}P[\Phi(x)], \qquad /2/$$

дорівнює $q=\min\{2\varphi,\varphi+2\}$.

Багатократне застосування теореми I з праці [2] дає змогу на основі /2/ побудувати ефективний рекурсивний алгоритм.

Приймемо

$$A_j(x)=A_{j-1}(x)-[P'(x-\Gamma(x)P(x))]^{-1}P(A_{j-1}(x)), \qquad /3/$$

де $j=2,3,\dots,t$;

$$A_1(x)=x-\frac{1}{2}\Gamma(x)P(x)-\frac{1}{2}[P'(x-\Gamma(x)P(x))]^{-1}P(x). \qquad /4/$$

Послідовно вибираючи у /2/ $\Phi(x)=A_k(x)$, $k=1,2,\dots,t-1$, отримаємо, що порядок збіжності алгоритму

$$x_{n+1}=A_t(x_n) \qquad /5/$$

дорівнює $3+2(t-1)=2t+1$.

Справді, порядок збіжності алгоритму, що породжується оператором /4/ дорівнює трьом, а кожне застосування /3/ збільшує порядок збіжності методу, що породжується оператором /3/, на два.

Важливою перевагою алгоритму /5/ порівняно з рекурсивними методами, поданими у праці [2], є те, що він використовує лише похідні першого порядку.

Порівняно з іншими відомими методами високого порядку збіжності алгоритм /5/ має і ту перевагу, що найбільш трудомісткі обчислення /наприклад, у випадку нелінійної системи рівнянь з багатьма невідомими – побудова матриці системи та її LU – розклад [4] / виконуються лише через декілька кроків. Більше того, як добре видно з /3/–/4/, ця матриця спільна зразу для декількох лінійних систем. Точніше кажучи, необхідно виконувати побудову та LU – розклад [4] лише двох матриць: $P'(x)$ та $P'(x-\Gamma(x)P(x))$ через кожні t кроків при порядку збіжності $2t+1$. Тут, природно, виникає питання про оптимальне значення параметра t /"глибина рекурсії"/. Очевидно, це значення залежить від конкретного класу задач і може вибиратись на основі відомих критеріїв ефективності. Зрозуміло, що при розв"язуванні конкретної задачі значення t задається заздалегідь. Воно визначає кількість кроків, протягом яких значення операторів $P'(x)$ та $P'(x-\Gamma(x)P(x))$ не обчислюються заново.

Розглянемо зараз, як похибки заокруглень при обчисленнях впливають на властивості збіжності алгоритму /5/. Далі вважатимемо, що у /I/ оператор P діє з простору R^N у простір R^N. Таким чином, /I/ – це нелінійна система N рівнянь з N невідомими. Замість обертання матриці Якобі розв"язуємо систему лінійних рівнянь - це значно вигідніше за кількістю операцій. Запишемо обчислювальну схему методу /5/, де верхній індекс – лічильник глибини рекурсії,

$d_n, x_n, P(x_n), u_n, z_n, f_n, S_n$ – N – вектори, $P'(x_n), P'(f_n)$ – $N \times N$ матриці /Якобі/:

$$
\begin{aligned}
&P'(x_n)\,d_n = P(x_n),\\
&f_n = x_n - d_n,\\
&P'(f_n)\,u_n = P(x_n),\\
&z_n^{(1)} = x_n - \tfrac{1}{2}(d_n + u_n),\\
&P'(f_n)\,s_n^{(j-1)} = P(z_n^{(j-1)}),\\
&z_n^{(j)} = z_n^{(j-1)} - s_n^{(j-1)}, \quad j = 2,3,\dots,t,\\
&x_{n+1} = z_n^{(t)}, \quad n = 0,1,2,\dots
\end{aligned}
\qquad /6/
$$

Як бачимо, у схемі /6/ необхідно лише два рази побудувати матрицю Якобі та провести її LU – розклад. Це основні обчислення, обсяг решти обчислень незначний.

Згідно з працею [4] наближений розв"язок лінійної системи на ЕОМ за допомогою гауссівського LU – розкладу еквівалентний точному розв"язку цієї системи зі збуреною матрицею. Тому для теоретичного дослідження алгоритму, показаного схемою /6/, перепишемо її у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&(P'(x_n)+\tilde V(x_n))d_n = P(x_n),\\
&f_n = x_n - d_n,\\
&(P'(f_n)+V(x_n))u_n = P(x_n),\\
&t_n^{(1)} = x_n - \tfrac{1}{2}(d_n - u_n),\\
&(P'(f_n)+V^{(j-1)}(x_n))s_n^{(j-1)} = P(t_n^{(j-1)}),\\
&t_n^{(j)} = t_n^{(j-1)} - s_n^{(j-1)},\quad j=2,3,\dots,t,\\
&x_{n+1} = t_n^{(t)},\quad n=0,1,2,\dots
\end{aligned}
\qquad /7/
$$

Застосовуючи теорему I з праці [2], одержуємо, що в методі /5/ максимальна допустима похибка при розв"язуванні лінійних систем характеризується величиною

$$\|\tilde V(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|) = O(\|P(x_n)\|), \qquad /8/$$

$$\|V(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|^2) = O(\|P(x_n)\|^2), \qquad /9/$$

$$\|V^{(j-1)}(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|^2) = O(\|P(x_n)\|^2), \qquad /10/$$

$$j=2,3,\dots,t;\quad n=0,1,2,\dots$$

для забезпечення порядку збіжності $2t+1$. Це свідчить про добру стійкість рекурсивних методів.

Якщо потрібна точність розв"язування лінійних систем на деяких ітераціях не досягається із-за властивостей матриці Якобі або ресурсів ЕОМ,то після методу Гаусса слід застосовувати процедуру ітераційного уточнення [4] розв"язку лінійної системи. Ця процедура не вимагає великої кількості операцій, а без неї використання алгоритму високого порядку збіжності може втратити зміст внаслідок істотного зменшення порядку збіжності.

Список літератури: I. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Исследование условий сходимости и оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28.

2. Вартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. – В кн.: Математический сборник. Киев: Наукова думка, 1976. 3. Канторович Л.В., О методе Ньютона. Труды математического ин-та им. Стеклова, 1949, № 28. 4. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969.

Стаття надійшла в редколегію 24.09.1979 р.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Візьмемо інтегральне рівняння

$$u(x,y)=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta+f(x,y) \qquad /1/$$

з неперервним ядром $K(x,y,\xi,\eta,u)$ і неперервним вільним членом $f(x,y)$, D – криволінійна область, обмежена по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$.

Рівняння /1/ розглядаємо як функціональне

$$u=Tu \qquad /1'/$$

у просторі $E=L_2(D)$ із нормою

$$\|u\|^2=\iint\limits_D u^2(x,y)\,dx\,dy,$$

де T – нелінійний оператор вигляду

$$Tu=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta+f(x,y), \qquad /2/$$

визначений на деякій множині $\Omega\subset E$.

Наближений розв"язок /1/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\varphi_k(x,y), \qquad /3/$$

де $\{\varphi_k(x,y)\}$ – лінійно незалежна повна ортонормована система функцій в області зміни y $[g(x),h(x)]$. Шукані коефіцієнти