2. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. – В кн.: Математический сборник. Киев: Наукова думка, 1976. 3. Канторович Л.В., О методе Ньютона. Труды математического ин-та им. Стеклова, 1949, № 28. 4. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969.

Стаття надійшла в редколегію 24.09.1979 р.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Візьмемо інтегральне рівняння

$$u(x,y)=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta+f(x,y) \qquad /1/$$

з неперервним ядром $K(x,y,\xi,\eta,u)$ і неперервним вільним членом $f(x,y)$, D – криволінійна область, обмежена по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$.

Рівняння /1/ розглядаємо як функціональне

$$u=Tu \qquad /1'/$$

у просторі $E=L_2(D)$ із нормою

$$\|u\|^2=\iint\limits_D u^2(x,y)\,dx\,dy,$$

де T – нелінійний оператор вигляду

$$Tu=\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta+f(x,y), \qquad /2/$$

визначений на деякій множині $\Omega\subset E$.

Наближений розв"язок /1/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\,\varphi_k(x,y), \qquad /3/$$

де $\{\varphi_k(x,y)\}$ – лінійно незалежна повна ортонормована система функцій в області зміни y $[g(x),h(x)]$. Шукані коефіцієнти

$C_K(x)\ (K=1,2,\dots,n)$ визначаємо з системи

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left\{u_n(x,y)-\iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta,u_n(\xi,\eta))-f(x,y)\right\}\varphi_m(x,y)dy=0, \quad /4/$$
$$m=1,2,\dots,n,$$

що є системою нелінійних інтегральних рівнянь відносно шуканих функцій $C_K(x)$.

Позначимо через E_n множину функцій вигляду $g_n(x,y)=\sum\limits_{K=1}^{n} l_K(x)\varphi_K(x,y)$, де $l_K(x)$ – довільні інтегровні з квадратом функції; E_n – замкнений підпростір у E. Введемо ортопроектор P_n, що проектує E на E_n:

$$P_n h(x,y)=\sum_{K=1}^{n}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} h(x,y)\varphi_K(x,y)dy\right)\cdot\varphi_K(x,y);\ h(x,y)\in E.$$

Тепер нелінійну систему інтегральних рівнянь /4/ можемо розглядати як функціональне рівняння у просторі E_n

$$u_n=P_n T u_n, \qquad /4'/$$

де оператор $P_n T$ визначений на елементах $Z_n(x,y)=\sum\limits_{K=1}^{n} l_K(x)\varphi_K(x,y)$ із множини $\Omega\cap E_n$.

Т е о р е м а. Нехай /І/ має розв"язок $u^*(x,y)$, а ядро рівняння $K(x,y,\xi,\eta,u)$ неперервне по сукупності змінних в області

$$a\le x,\xi\le b,\ g(x)\le y\le h(x),\ g(\xi)\le\eta\le h(\xi),\ |u(\xi,\eta)-u^*(\xi,\eta)|\le\delta \quad /5/$$

і вільний член $f(x,y)$ неперервний в області D.

Тоді справедливі наступні твердження:

а/ якщо розв"язок $u^*(x,y)$ ненульового індексу ізольований у просторі $C(D)$, то при достатньо великих n /4/ має у сфері $\|u-u^*\|\le\delta_1$ $(\delta_1=\delta\sqrt{mes\,D})$ хоча б один розв"язок $u_n(x,y)$ і всі такі розв"язки $u_n(x,y)$ прямують за нормою при $n\to\infty$ до $u^*(x,y)$;

б/ коли ядро рівняння $K(x,y,\xi,\eta,u)$ має частинну похідну по u неперервну щодо сукупності змінних в області /5/, а для лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$h(x,y) = \iint_{D} K_0(x,y,\xi,\eta)\, h(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

де $$K_0(x,y,\xi,\eta) = \frac{\partial K(x,y,\xi,\eta,u^*(\xi,\eta))}{\partial u},$$

існує лише нульовий розв"язок, то при достатньо великих n рівняння /4'/ в сфері $\|u - u^*\| \leq \delta_2$ достатньо малого радіуса δ_2 має єдиний розв"язок u_n, причому справедлива оцінка збіжності

$$c_1 \|u^* - u_n^*\| \leq \|u^* - u_n\| \leq c_2 \|u^* - u_n^*\|, \qquad /6/$$

де $u_n^* = P_n u^*$, $c_1, c_2 = const > 0$.

Д о в е д е н н я . Неперервність ядра $K(x,y,\xi,\eta,u)$ в області /5/ зумовлює повну неперервність оператора T на сфері $\bar{R}$ $(\|u - u^*\| \leq \delta_1)$. Звідси, враховуючи обмеженість операторів P_n та умову $\|u - P_n u\| \to 0$ при $n \to \infty$ для довільного $u \in E$, маємо

$$\sup_{u\in\bar{R}} \|U_n u\| = \sup_{u\in\bar{R}} \|(T - P_n T)u\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad /7/$$

А відомо [x], що індекс розв"язку $u^*(x,y)$ рівняння /I'/ один і той же у просторах E і C, а за припущенням він відмінний від нуля. Використовуючи теорему I9.4 /з уже цитованої праці/, отримуємо твердження а/.

Перейдемо тепер до твердження б/. Оскільки оператор T – неперервний, а $P_n \to I$ сильно, то

$$\|P_n T P_n u^* - T u^*\| \leq \|P_n T P_n u^* - T P_n u^*\| + \|T P_n u^* - T u^*\| \to 0 \qquad /8/$$

при $n \to \infty$. Існування неперервної в області /5/ частинної похідної $\frac{\partial K(x,y,\xi,\eta,u)}{\partial u}$ зумовлює неперервну диференційованість T у сфері $\|u^* - u\| \leq \delta_1$. Тому виконується співвідношення

$$\|P_n T'(P_n u^*) - T'(u^*)\| \leq \|P_n T'(P_n u^*) - T'(P_n u^*)\| + \|T'(P_n u^*) - T'(u^*)\| \to 0 \quad /9/$$

при $n \to \infty$.

---

[x] К р а с н о с е л ь с к и й М.А. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.

Оскільки оператор $T'(u^*)h(x,y) = \iint\limits_D K(x,y,\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta$ цілком неперервний у E_n і рівняння $h = T'(u^*)h$ має за умовою теореми лише нульовий розв"язок, то для оператора $I - T'(u^*)$ існує обмежений обернений, а також виконується нерівність

$$\|P_n T'(u) - P_n T'(P_n u'')\| \leq \|T'(u) - T'(P_n u^*)\| < \varepsilon \qquad /10/$$

для всіх $n \geq n_\varepsilon$, за умови $\|u - P_n u^*\| \leq \delta_\varepsilon$ при $u \in \Omega_n = \Omega \cap E_n$.

Використовуючи тепер теорему 19.1 наведеної праці, одержуємо, що знайдуться такі n_0 і δ_2, коли при $n \geq n_0$ /4/ має в сфері $\|u - u^*\| \leq \delta_2$ єдиний розв"язок $u_n(x,y)$. Із теореми 19.7 цієї ж праці випливає оцінка швидкості збіжності /6/.

Теорема доведена.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 519.21

І.М.Дудзяний, Є.В.Москвяк

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

У дослідженні тривалості активної праці виробів важливе місце належить функції розподілу ймовірностей [2].

$$H(t,a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{\alpha(\frac{t}{a})^b} e^{-\tau}\tau^{\beta-1}d\tau, \quad t > 0, \ (a>0, b>0, \alpha>0, \beta>0), \qquad /1/$$

де a і α – параметри масштабу; b і β – параметри форми. При $a = b = 1$ дістаємо функцію гамма-розподілу

$$F(t,\alpha,\beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t e^{-\alpha\tau}\tau^{\beta-1}d\tau, \quad t>0, \ (\alpha>0, \beta>0), \qquad /2/$$

а при $\alpha = \beta = 1$ – функцію розподілу Вейбула

$$G(t,a,b) = 1 - e^{-(\frac{t}{a})^b}, \quad t > 0, \ (a>0, b>0). \qquad /3/$$