Оскільки оператор $T'(u^*)h(x,y)=\iint_D K'(x,y,\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta$ цілком неперервний у E_n і рівняння $h=T'(u^*)h$ має за умовою теореми лише нульовий розв"язок, то для оператора $I-T'(u^*)$ існує обмежений обернений, а також виконується нерівність

$$\|P_n T'(u)-P_n T'(P_n u^*)\| \leq \|T'(u)-T'(P_n u^*)\| < \varepsilon \qquad /10/$$

для всіх $n \geq n_\varepsilon$, за умови $\|u-P_n u^*\| \leq \delta_\varepsilon$ при $u \in \Omega_n = \Omega \cap E_n$.

Використовуючи тепер теорему 19.1 наведеної праці, одержуємо, що знайдуться такі n_0 і δ_2, коли при $n \geq n_0$ /4/ має в сфері $\|u-u^*\| \leq \delta_2$ єдиний розв"язок $u_n(x,y)$. Із теореми 19.7 цієї ж праці випливає оцінка швидкості збіжності /6/.

Теорема доведена.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 519.21

І.М.Дудзяний, Є.В.Москвяк

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

У дослідженні тривалості активної праці виробів важливе місце належить функції розподілу ймовірностей [2].

$$H(t,a,b,\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\alpha(\frac{t}{a})^b} e^{-\tau}\tau^{\beta-1}d\tau,\ t>0,\ (a>0, b>0, \alpha>0, \beta>0), \qquad /1/$$

де a і α – параметри масштабу; b і β – параметри форми. При $a=b=1$ дістаємо функцію гамма-розподілу

$$F(t,\alpha,\beta)=\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\tau^{\beta-1}d\tau,\ t>0,\ (\alpha>0, \beta>0), \qquad /2/$$

а при $\alpha=\beta=1$ – функцію розподілу Вейбула

$$G(t,a,b)=1-e^{-(\frac{t}{a})^b},\ t>0,\ (a>0, b>0). \qquad /3/$$

Розподіл /I/ описує широкий клас руйнування виробів: від крихкого /2/ до руйнування зі значною деформацією /3/. Відзначимо, що апріорі не завжди відомо, якого типу руйнування відбувається у конкретному випадку. Як правило, відома лише статистична інформація про руйнування, на основі якої необхідно визначити сам закон розподілу, а також параметри цього розподілу.

Коли апріорі вважати, що руйнування підпорядковується одному з двох законів розподілу /2/ або /3/, то чотирипараметричний розподіл /I/ можна використати для визначення цих двопараметричних законів розподілу.

На основі відомих властивостей функції розподілу

$$H(0,a,b,\alpha,\beta)=0,$$
$$H(\infty,a,b,\alpha,\beta)=1 \qquad /4/$$

функцію /I/ легко звести до трипараметричної функції розподілу

$$h(t,a,b,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{(\frac{t}{a})^b} e^{-\tau}\tau^{\beta-1}d\tau,\ t>0,\ (a>0,b>0,\beta>0). \qquad /5/$$

Згідно з методом моментів для визначення параметрів a, b, β у розподілі /5/ отримуємо систему нелінійних рівнянь

$$h(t_i,a,b,\beta)=\frac{k_i-0{,}3}{N+0{,}4}\ ,\ i=1,2,3, \qquad /6/$$

де t_i – час виходу із ладу k_i деталей /зразків/ в N узятих для спостереження.

При розв"язуванні нелінійної системи /6/ на ЕОМ одержуємо наближені результати. Тому співвідношення

$$h(0,a,b,\beta)=0,$$
$$h(\infty,a,b,\beta)=1 \qquad /7/$$

на ЕОМ можуть практично і не виконуватись.

У зв"язку з цим пропонуємо розв"язок системи рівнянь /6/, /7/ замінити знаходженням мінімуму функціоналу

$$\varkappa^2 (a, b, \beta) = \sum_{i=1}^{4} \left(h(t_i, a, b, \beta) - \frac{K_i - 0{,}3}{N + 0{,}4} \right)^2, \qquad /8/$$

де t_4 – час виходу із ладу всіх N деталей.

Для визначення тих значень параметрів a, b, β, за яких функціонал /8/ досягає свого мінімуму, використовуємо градієнтний метод [I]. Тоді всі параметри отримують прирости таким чином, щоб результуючий рух у параметричному просторі відбувався вздовж антиградієнта.

Метод мінімізації функціоналу /8/ для знаходження параметрів a, b, β реалізовано у підпрограмі *GRADLS* /Фортран-4/. Оператор початкового рядка

SUBROUTINE GRADLS (X, Y, SIG, NP, NT, M, A, DA, YF, CH) /9/

де X – масив незалежних змінних t_i, $i = \overline{1, NP}$; Y – масив відповідних значень емпіричної функції розподілу

$$H_{емп}(t_i) = \frac{K_i - 0{,}3}{N + 0{,}4}, \quad i = \overline{1, NP}. \qquad /10/$$

Масив A розмірності NT містить початкові значення параметрів, а масив DA – їхні прирости. На основі експериментальної перевірки, на ЕОМ виявлено, що всі елементи масиву A достатньо прийняти на початку рівними одиниці, а елементи DA –0,05. YF – масив значень функції /5/, а саме

$$YF(i) = h(t_i), \quad i = \overline{1, NP}. \qquad /11/$$

Параметрам M і SIG при виклику підпрограми необхідно відповідно присвоїти 0 і I.

На виході масив A дає значення шуканих параметрів, при яких функціонал /8/ досягає мінімуму; CH – абсолютне значення цього мінімуму.

На основі проведених експериментів для найбільш "доброго" наближення емпіричної функції розподілу /10/ за допомогою функції розподілу /5/ час t_i доцільно вибирати таким, щоб

$$\frac{K_1 - 0{,}3}{N + 0{,}4} \approx 0{,}25\,; \quad \frac{K_2 - 0{,}3}{N + 0{,}4} \approx 0{,}5\,; \quad \frac{K_3 - 0{,}3}{N + 0{,}4} \approx 0{,}75\,. \qquad /12/$$

Якщо параметри a, b, β трипараметричної функції розподілу /5/ знайдені, то легко визначити, який вид руйнування /2/ або /3/ наявний при даному статистичному матеріалі. Коли $\beta = 1$, то маємо розподіл Вейбула, а при $b = 1$ – функцію гамма-розподілу.

За умови, що b і β не дають змоги оцінити вид руйнування, необхідно провести додаткові статистичні дослідження.

Для визначення параметрів α, β гамма-розподілу, або a, b розподілу Вейбула скористаємось мінімізацією відповідних функціоналів

$$\varkappa_1^2(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{4} \left(F(t_i,\alpha,\beta) - H_{емп}(t_i)\right)^2, \qquad /13/$$

або

$$\varkappa_2^2(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \left(G(t_i,a,b) - H_{емп}(t_i)\right)^2. \qquad /14/$$

У цьому випадку для задання початкових значень параметрів /елементи масиву A / можна скористатися значеннями знайдених параметрів a, b, β розподілу /5/.

Запропонована методика знаходження параметрів розподілу процесів руйнування дає змогу удосконалити інженерні способи обробки статистичної інформації про надійність виробів машинобудування з відповідним рівнем вимогливості до їхньої достовірності.

Список літератури: I. В а с и л ь е в Ф.Т. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1974.
2. К в і т І.Д., М о с к в я к Є.В. Розподіли деяких процесів руйнування. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979 вип. 15.

Стаття надійшла в редколегію 14.09.1979 р.