УДК 534.III

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудзяний

# ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ОДНИМ НЕЛІНІЙНИМ РІВНЯННЯМ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду:

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\gamma(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varepsilon F\left(\tau,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \qquad /I/$$

де $\varepsilon$ - малий параметр; $\tau=\varepsilon t$ - "повільний час"; $\alpha(\tau),\beta(\tau),\gamma(\tau)$ - повільно змінні коефіцієнти, що задовольняють умову гіперболічності [7] для відповідного однорідного $\varepsilon=0$ рівняння

$$\beta^2(\tau)-4\alpha(\tau)\gamma(\tau)>0; \qquad /2/$$

$F\left(\tau,x,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ - відома нелінійна функція своїх аргументів.

Відзначимо, що прийнявши $\varepsilon=0$, з рівняння /I/ одержуємо:

а/ при

$$\alpha=\frac{E}{\rho}-V_0^2;\quad \beta=-2V_0;\quad \gamma=-1, \qquad /3/$$

де $E$ - модуль пружності; $\rho$ - маса одиниці об"єму,
лінійне диференціальне рівняння поздовжніх коливань стрічки, яка переміщається зі сталою швидкістю $V_0$ вздовж своєї осі [8];

б/ при

$$\alpha=\frac{T_0}{\rho}-V_0^2;\quad \beta=-2V_0;\quad \gamma=-1, \qquad /4/$$

де $T_0$ - початковий натяг струни,
лінійне диференціальне рівняння поперечних коливань струни, яка рухається зі сталою швидкістю $V_0$ вздовж своєї осі [9];

в/ при

$$\alpha=\frac{T_0-\rho f_0-m_2V_0^2}{m_1+m_2};\quad \beta=\frac{-2V_0m_2}{m_1+m_2};\quad \gamma=-1, \qquad /5/$$

де $T_0$ - натяг шланга; $m_1$ - маса одиниці довжини шланга; $m_2$ - маса рідини, що припадає на одиницю довжини шланга; $F_0$ – площа внутрішнього перерізу шланга; $p$ – тиск в рідині на ділянці коливань, лінійне диференціальне рівняння поперечних коливань вертикального гнучкого шланга, по якому зі сталою швидкістю $V_0$ тече ідеальна нестислива рідина [6].

Задача про коливання згаданих механічних систем із врахуванням геометричної і фізичної нелінійностей, а також повільної зміни параметрів коливань систем, зводиться до дослідження розв"язку межової задачі для нелінійного рівняння /I/.

Враховуючи наявність малого параметра, при побудові розв"язку слабонелінійного диференціального рівняння /I/ використаємо асимптотичний метод нелінійної механіки. При цьому досліджуємо коливання, близькі до коливань у $K$ -й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Функцію переміщень $u(x,t)$ подамо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t)=a[\varphi_{1K}(x)\cos\psi_K+\varphi_{2K}\sin\psi_K]+\varepsilon u_{1K}(x,\tau,a,\psi_K)+\varepsilon^2\ldots, \quad /6/$$

де $\varphi_{1K}(x)\cos\psi_K+\varphi_{2K}\sin\psi_K$ – розв"язок відповідної незбуреної / $\varepsilon=0$ / межової задачі для /I/; $a$ і $\psi_K$ – амплітуда і фаза, які визначають із системи рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_{1K}(\tau,a)+\varepsilon^2\ldots;$$
$$\frac{d\psi_K}{dt}=\omega_K(\tau)+\varepsilon B_{1K}(\tau,a)+\varepsilon^2\ldots, \quad /7/$$

де $u_{1K}(x,\tau,a,\psi_K)$ – невідомі; $2\pi$ – періодичні по $\psi_K$ функції.

Тепер необхідно знайти функції

$$u_{1K}(x,\tau,a,\psi_K),\ldots;\ A_{1K}(\tau,a),\ldots;\ B_{1K}(\tau,a),\ldots \quad /8/$$

таким чином, щоб вираз /6/, в який замість $a$ і $\psi$ підставимо функції часу, що визначаються оці співвідношеннями /7/, задовольняв вихідне рівняння /I/.

Для однозначності визначення /8/ на функції $u_{1k}(x,\tau,a,\psi_k)$ накладаються додаткові умови відсутності у них головних гармонік [I]

$$\int_0^{2\pi} u_{1k}(x,\tau,a,\psi_k)\cos\psi_k\,d\psi_k=0;\ \int_0^{2\pi} u_{1k}(x,\tau,a,\psi_k)\sin\psi_k\,d\psi_k=0. \qquad /9/$$

Підставляючи /6/, /7/ у /I/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $\varepsilon$ , отримуємо

$$\alpha(\tau)\frac{d^2\varphi_{1k}}{dx^2}+\beta(\tau)\omega_k(\tau)\frac{d\varphi_{2k}}{dx}-\gamma(\tau)\omega_k^2(\tau)\varphi_{1k}(x)=0,$$

$$\alpha(\tau)\frac{d^2\varphi_{2k}}{dx^2}+\beta(\tau)\omega_k(\tau)\frac{d\varphi_{2k}}{dx}-\gamma(\tau)\omega_k^2(\tau)\varphi_{2k}(x)=0. \qquad /10/$$

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x^2}+\beta(\tau)\omega_k(\tau)\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x\partial\psi_k}+\gamma(\tau)\omega_k^2(\tau)\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial\psi_k^2}=$$

$$=f_{1k}(\tau,x,a,\psi_k)-\{\beta(\tau)[A_{1k}\frac{d\varphi_{1k}}{dx}+aB_{1k}\frac{d\varphi_{2k}}{dx}]+$$

$$+\gamma(\tau)[2\omega_k(\tau)A_{1k}\varphi_{2k}(x)-2a\omega_k(\tau)B_{1k}\varphi_{1k}(x)+$$

$$+a\frac{d\omega_k}{d\tau}\varphi_{2k}(x)]\}\cos\psi_k-\{\beta(\tau)[A_{1k}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial x}- \qquad /11/$$

$$-aB_{1k}\frac{d\varphi_{1k}}{dx}]-\gamma(\tau)[2\omega_k(x)A_{1k}\varphi_{1k}(x)+$$

$$+2a\omega_k(\tau)B_{1k}\varphi_{2k}(x)+a\frac{d\omega_k}{d\tau}\varphi_{1k}(x)]\}\sin\psi_k,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

де $f_{1k}(\tau,x,a,\psi_k),\ldots$ – коефіцієнти розкладу функції $\varepsilon F(\tau,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$ в асимптотичний ряд вигляду:

$$\varepsilon F(\tau,\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})=\varepsilon f_{1k}(\tau,x,a,\psi_k)+\varepsilon^2\ldots \qquad /12/$$

Розв"язуючи систему звичайних диференціальних рівнянь /10/ з врахуванням межових умов конкретної задачі, знаходимо функції $\varphi_{1k}(x)$, $\varphi_{2k}(x)$ і $\omega_k(\tau)$ .

Внаслідок, для нульових межових умов маємо

$$\varphi_{1k}(x) = \sin k\pi \frac{x}{l} \cos\left[k\pi \frac{m+n}{m-n}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]; \qquad /13/$$

$$\varphi_{2k}(x) = \sin k\pi \frac{x}{l} \sin\left[k\pi \frac{m+n}{m-n}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right];$$

$$\omega_k(\tau) = \frac{2k\pi}{(m-n)l}, \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad /14/$$

де $l$ – довжина розглядуваної ділянки коливань;

$$m = \frac{\beta(\tau) + \sqrt{\beta^2(\tau) - 4\alpha(\tau)\gamma(\tau)}}{2\alpha(\tau)}, \quad n = \frac{\beta(\tau) - \sqrt{\beta^2(\tau) - 4\alpha(\tau)\gamma(\tau)}}{2\alpha(\tau)}.$$

Із неоднорідного диференціального рівняння /II/ знаходимо розв"язок задачі у першому наближенні.

Існує така теорема.

Т е о р е м а . Нехай $u(x,\tau,a,\psi)$ – неперервна разом зі своїми частинними похідними по $x$ і $\psi$ до другого порядку включно $2\pi$ – періодична по $\psi$ функція, що задовольняє умови вигляду /9/, а $\varphi_{1k}(x)$ і $\varphi_{2k}(x)$ – розв"язки системи /10/. Тоді являні співвідношення

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\left[\alpha(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \psi} + \gamma(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}\right]\left\{\begin{matrix}[\varphi_{1k}(x)\cos\psi + \varphi_{2k}(x)\sin\psi] \\ [\varphi_{1k}(x)\sin\psi - \varphi_{2k}(x)\cos\psi]\end{matrix}\right\} dx\,d\psi = 0. \qquad /15/$$

Справедливість теореми доводиться легко інтегруванням по частинах.

Використовуючи рівності /15/, з диференціального рівняння /II/ визначаємо $A_{1k}(\tau,a)$ і $B_{1k}(\tau,a)$, що дає змогу перше наближення асимптотичного розв"язку рівняння /I/ записати у вигляді:

$$u_I(x,t) = a\left[\varphi_1(x)\cos\psi + \varphi_2(x)\sin\psi\right], \qquad /16/$$

де амплітуда $a$ і фаза $\psi$ визначаються з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\,\frac{M(\tau)\Phi_1(\tau,a) + N(\tau)\left[\Phi_2(\tau,a) + a\frac{d\omega}{d\tau}\rho(\tau)\right]}{M^2(\tau) + N^2(\tau)}, \qquad /17/$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)+\varepsilon\,\frac{N(\tau)\Phi_1(\tau,a)-M(\tau)\left[\Phi_2(\tau,a)+a\frac{d\omega}{d\tau}P(\tau)\right]}{a\left[M^2(\tau)+N^2(\tau)\right]},$$

в яких

$$M(\tau)=\beta(\tau)\int_0^l\left[\frac{d\varphi_1}{dx}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\frac{d\varphi_2}{dx}\right]dx;$$

$$N(\tau)=\beta(\tau)\int_0^l\left[\varphi_1(x)\frac{d\varphi_2}{dx}-\varphi_2(x)\frac{d\varphi_1}{dx}\right]dx-2\omega(\tau)P(\tau);$$

$$P(\tau)=\gamma(\tau)\int_0^l\left[\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)\right]dx;$$

$$\Phi_1(\tau,a)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_1(\tau,x,a,\psi)\left[\varphi_1(x)\cos\psi+\varphi_2(x)\sin\psi\right]dx\,d\psi;$$

$$\Phi_2(\tau,a)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\int_0^{2\pi}f_1(\tau,x,a,\psi)\left[\varphi_1(x)\sin\psi-\varphi_2(x)\cos\psi\right]dx\,d\psi.$$

У формулах /I6/, /I7/ і далі індекс $K$ опускаємо. Можна показати, що для нульових межових умов $M(\tau)=0$ і система диференціальних рівнянь /I7/ набуде більш простого вигляду.

Відзначимо, що побудову вищих наближень, які значно ускладнюють розрахунок, можна вважати недоцільною, оскільки результати [8, 9] свідчать про високу точність першого наближення.

П р и к л а д . Розглянемо вільні нелінійні коливання струни, що рухається зі сталою швидкістю $V_0$ у повздовжньому напрямку [4].

Коефіцієнти рівняння /I/ у цьому випадку матимуть вигляд /4/, а функція

$$\varepsilon F\left(\tau,\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad /I8/$$

де $\delta=\frac{3}{2\rho}(T_0-EA_0)$; $A_0$ – площа поперечного перерізу струни.

Для нульових межових умов зі співвідношення /I7/ з врахуванням /I3, /I4/ і /I8/ отримуємо

$$\frac{da}{dt}=0;\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\Delta\omega(a), \qquad /I9/$$

де $\omega$ – власна частота лінійних коливань рухомої струни, що визначається формулою /I4/.

$$\Delta\omega(a) = \frac{\Phi_1(\tau, a)}{a M} = \frac{1}{12B\left(\frac{\alpha}{\rho}\beta(\tau) + l\gamma(\tau) + \omega(\tau)\right)} \times$$

$$\times \left[-a^2\delta l\left(-C^4 + 6C^3D - 8C^2D^2 - 2CD^3 - D^4\right) + \frac{a^2\delta l(m-n)^2}{8K}\left(\frac{2C^4}{m(3m+n)} + \frac{D^4}{n(3n+m)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2C^3D}{(3m+n)(n+m)} + \frac{8C^2D^2(m-n)}{(3n+m)(3m+n)(m+n)} - \frac{4CD^3}{(m+n)(3n+m)}\right)\right],$$

$$B = \frac{EK(m+n)}{m-n}; \quad C = A + \frac{B}{l}; \quad D = A - \frac{B}{l}; \quad A = \frac{EK}{l};$$

$$\alpha = \frac{T_0}{\rho} - V_0^2; \quad \beta = -2V_0; \quad \gamma = -1.$$

Як і слід було чекати, амплітуда коливань стала, оскільки ми розглядаємо геометричну нелінійність.

З другої рівності /19/ записуємо вираз для власної частоти нелінійних коливань у першому наближенні

$$\omega_1(a) = \omega + \Delta\omega(a). \qquad /20/$$

Використовуючи формулу /20/, можна дослідити вплив сталої швидкості руху на частоти власних нелінійних коливань струни.

Викладена методика дослідження значно ефективніша ніж методика праці [4].

Список літератури: І. Боголюбов Н.Н., Митропольський Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.-М.: Наука, 1974, 501 с. 2. Калиняк Н.И., Барвинский А.Ф. Нелинейные продольные колебания подвижного стержня с учетом несовершенной упругости материала. - Вестн. Львов. политехн.ин-та. Доклады и научные сообщения, 1976, № 6. 3. Митропольский Ю.А., Моисеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. - Киев: Вища школа. Изд-во Киев. ун-та, 1976. 4. Моут Мм. О нелинейных колебаниях струны, движущейся в продольном направлении. - Прикладная механика, 1966, т.33, № 2. 5. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. - К.: Наукова думка, 1970. 6. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. - М.: Высшая школа, 1973. 7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.

8. Т а р м е н , М о у т Мл. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении. – Прикладная механика, 1969, т.36, № 1. 9. Skutch R. Ueber die Bewegung eines gespanten Fadens.– Annalen der Physik und Chemie, 1897, vol 61.

Стаття надійшла в редколегію 20.12.1979 р.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник, Т.Т.Романик

## ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ДЕЯКИХ ДВОМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ

Визначення електростатичного поля, створеного у просторі зарядженими поверхнями складної конфігурації, зводиться до знаходження розподілу по них зарядів. Остання задача, як відомо [3], формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \sigma^*(Q)/R(M,Q)\,dS_Q = U^*(M), \qquad /1/$$

де $\sigma^*(Q)$ – шукана густина розподілу заряду по поверхні $S$ ; $R(M,Q)$ – відстань між точкою інтегрування та деякою контрольною точкою $M \in S$ ; $U^*(M)$ – заданий потенціал на $S$ . У випадку декількох заряджених поверхонь інтеграл в /1/ вважається сумою інтегралів по відповідних поверхнях.

Розглянемо випадок, коли зарядженою поверхнею є частина бічної поверхні еліптичного циліндра, розташованого довільним чином у просторі. Параметричне зображення цієї поверхні відоме і має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(u,v) = a\cos u\cos\gamma - b\sin u\cos\beta\sin\gamma + v\sin\beta\sin\gamma + x^*, \\ y(u,v) = a\cos u\sin\gamma + b\sin u\cos\beta\cos\gamma - v\sin\beta\cos\gamma + y^*, \\ z(u,v) = b\sin u\sin\beta + v\cos\beta + z^*, \end{cases} \qquad /2/$$
$$(u,v) \in \Delta = [u_1,u_2] \times [v_1,v_2],$$