8. Тармен, Моут Мл. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении. – Прикладная механика, 1969, т.36, № 1. 9. Skutsch R. Ueber die Bewegung eines gespannten Fadens.- Annalen der Physik und Chemie, 1897, vol 61.

Стаття надійшла в редколегію 20.12.1979 р.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник, Т.Т.Романин

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ДЕЯКИХ ДВОМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ

Визначення електростатичного поля, створеного у просторі зарядженими поверхнями складної конфігурації, зводиться до знаходження розподілу по них зарядів. Остання задача, як відомо [3], формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \sigma^*(Q)/R(M,Q)\,dS_Q = U^*(M), \qquad /1/$$

де $\sigma^*(Q)$ – шукана густина розподілу заряду по поверхні S ; $R(M,Q)$ – відстань між точкою інтегрування та деякою контрольною точкою $M \in S$; $U^*(M)$ – заданий потенціал на S . У випадку декількох заряджених поверхонь інтеграл в /1/ вважається сумою інтегралів по відповідних поверхнях.

Розглянемо випадок, коли зарядженою поверхнею є частина бічної поверхні еліптичного циліндра, розташованого довільним чином у просторі. Параметричне зображення цієї поверхні відоме і має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(u,v) = a\cos u\cos\gamma - b\sin u\cos\beta\sin\gamma + v\sin\beta\sin\gamma + x^*, \\ y(u,v) = a\cos u\sin\gamma + b\sin u\cos\beta\cos\gamma - v\sin\beta\cos\gamma + y^*, \\ z(u,v) = b\sin u\sin\beta + v\cos\beta + z^*, \end{cases} \qquad /2/$$

$(u,v) \in \Delta = [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$, де β і γ – кути повороту локальної системи координат, зв"язаної з циліндром, відносно основної XYZ ; x^*, y^*, z^* – координати початку локальної системи.

Враховуючи /2/, перетворимо /I/ до вигляду

$$\iint_{\Delta} \sigma(u,v)\, Q^{(0)}(u,v)\, du\, dv = U(u_0,v_0),\ (u_0,v_0)\in\Delta, \qquad /3/$$

де

$$Q^{(0)}(u,v) = P(u)\left[(u-u_0)^2\, T(u,u_0) + (v-v_0)^2\right]^{-1/2}, \qquad /4/$$

причому

$$P(u) = (a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{1/2},$$

$$T(u,u_0) = \frac{\sin^2\frac{u-u_0}{2}}{\left(\frac{u-u_0}{2}\right)^2} \times \left[a^2\sin^2\frac{u+u_0}{2} + b^2\cos^2\frac{u+u_0}{2}\right].$$

Двомірне рівняння /3/ – першого роду, тому для його наближеного розв"язку можна використати метод регуляризації [2], чисельна реалізація якого в загальному випадку пов"язана з певними обчислювальними труднощами. Наявність зосередженої особливості в ядрі рівняння /3/, а також апріорна інформація про характер поведінки шуканої функції дають змогу скористатися більш простим методом саморегуляризації [I]. Таким чином, властивість ядра, а також апріорне припущення про те, що функція

$$\Omega(u,v)\sigma(u,v) = \sigma(u,v)(u-u_1)^{n_1}(u_2-u)^{n_2}(v-v_1)^{m_1}(v_2-v)^{m_2}, \qquad /5/$$

$$0 \le n_1, n_2, m_1, m_2 \le 0{,}5$$

мало змінюється в області $S_0 = \{(u,v): |u-u_0| \le \Delta_1,\ |v-v_0| \le \Delta_2\}$ при достатньо малих Δ_1 і Δ_2, дає змогу перетворити /3/ до рівняння другого роду.

Запишемо ядро інтегрального рівняння /3/ у вигляді суми

$$Q^{(0)}(u,v) = N(u,v) + G(u,v), \qquad /6/$$

де

$$N(u,v)=\begin{cases} \dfrac{P(u)(\Delta_1-|u-u_0|)(\Delta_2-|v-v_0|)}{\Delta_1\Delta_2\sqrt{(u-u_0)^2\,T(u,u_0)+(v+v_0)^2}}, & (u,v)\in S_0 \\ 0, & (u,v)\notin S_0, \end{cases}$$

$$G(u,v)=\begin{cases} \dfrac{P(u)(\Delta_1|v-v_0|+\Delta_2|u-u_0|-|u-u_0||v-v_0|)}{\Delta_1\Delta_2\sqrt{(u-u_0)^2\,T(u,u_0)+(v-v_0)^2}}, & (u,v)\in S_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{(u-u_0)^2\,T(u,u_0)+(v-v_0)^2}}, & (u,v)\notin S_0. \end{cases}$$

Підставляючи /6/ у /3/ і враховуючи /5/, отримуємо

$$6(u_0,v_0)\,\Omega(u_0,v_0)\,L(u_0,v_0)+\iint\limits_{\Delta}\sigma(u,v)\,G(u,v)\,du\,dv=U(u_0,v_0), \quad /7/$$

де

$$L(u_0,v_0)=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\iint\limits_{S_0}\frac{P(u)(\Delta_1-|u-u_0|)(\Delta_2-|v-v_0|)\,du\,dv}{\Omega(u,v)\sqrt{(u-u_0)^2\,T(u,u_0)+(v-v_0)^2}}. \quad /8/$$

Отже, маємо рівняння другого роду. При обчисленні інтеграла /8/ виникають труднощі, пов"язані з особливістю підінтегральної функції у точці (u_0,v_0), і при наближенні точки інтегрування до межі області Δ. Для послаблення першої з них запишемо /8/ наступним чином:

$$L(u_0,v_0)=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\,\Omega(u_0,v_0)}\left\{\iint\limits_{S_0}\frac{R(u,v)}{\Omega(u,v)}\,Q^{(0)}(u,v)\,du\,dv+\right. \quad /9/$$

$$\left.+\iint\limits_{S_0}Q^{(0)}(u,v)\,du\,dv\right\},$$

де

$$R(u,v)=(\Delta_1-|u-u_0|)(\Delta_2-|v-v_0|)\,\Omega(u_0,v_0)-\Delta_1\Delta_2\,\Omega(u,v).$$

Коли $u \to u_0, v \to v_0$, то вираз $\frac{R(u,v)}{\Omega(u,v)} G^{(k)}(u,v)$ набуває скінченного значення, і для обчислення першого інтеграла в /9/ можна застосувати кубатурні формули. Щоб усунути другу особливість, використовуємо спеціальну заміну змінних.

Другий інтеграл у /9/ перетворимо до такого, що береться аналітично. Для цього від інтегрування по параметру u перейдемо до інтегрування по l, яке інтерпретується як довжина дуги еліпса, що відраховується від деякого початкового положення значення $u_{поч}$. Нехай l_0 – довжина дуги, що визначається u_0. Добре видно, що у термінах l

$$P(u)\,du = dl,$$

а для $(u,v) \in S_0$ $(u-u_0)^2 T(u,u_0) + (v-v_0)^2 = (l-l_0)^2 + (v-v_0)^2$, і другий інтеграл у /9/ можна записати як

$$\int_{l_1}^{l_2} \int_{v_0-\Delta_2}^{v_0+\Delta_2} \frac{dl\,dv}{[(l-l_0)^2+(v-v_0)^2]^{1/2}}.$$

Отриманий інтеграл беремо аналітично.

Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду розв"язуємо методом колокації з використанням білінійної апроксимації шуканої густини.

Точність отриманого розв"язку оцінюємо апостеріорно. Визначивши густину розподілу зарядів, знаходимо значення потенціалу в точках поверхні, які не збігаються з контрольними. Згідно з принципом екстремума за відхиленням одержаних значень від заданих на поверхні S можна оцінити максимальну похибку розв"язку вихідного інтегрального рівняння.

Описана методика реалізована у вигляді комплексу прикладних програм, записаних алгоритмічною мовою Фортран-ІУ. Шляхом обчислювального експерименту виявлено, що Δ_1 і Δ_2 є параметрами регуляризації, оптимальний вибір яких суттєво впливає на точність розв"язку задачі.

На закінчення наведем результати розрахунку поля, утвореного бічною поверхнею круглого циліндра з довжиною твірної 1 і радіусом 0,15 ($v_1 = -v_2 = 0{,}5$). Граничне значення на поверхні дорівнює одиниці. Оптимальні значення параметрів $\Delta_1 = 0{,}27$, $\Delta_2 = 0{,}04$. Порядок розв'язуваної системи лінійних алгебраїчних рівнянь 64. Середня відносна похибка розв'язку не перевищувала 1%. Нижче наводимо значення потенціалу по осі циліндра:

v	потенціал по осі	v	потенціал по осі
0,00	I,000	0,30	0,990
0,05	I,000	0,35	0,979
0,I0	0,999	0,40	0,958
0,I5	0,999	0,45	0,9I8
0,20	0,998	0,50	0,855
0,25	0,995		

Список літератури: I. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода. - Вычислительные методы и программирование, I968, вып. I0. 2. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, I974. 3. Т о з о н и О.В., М а е р г о й з И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. - Киев: Техніка, I974.

Стаття надійшла в редколегію I0.03.I980 р.