УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Й.Г.[illegible]

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ШМІДТА НА ВИПАДОК БІГАРМОНІЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Шмідт [2] дослідив можливість аналітичного продовження гармонічних потенціалів через поверхню шару і довів, що у випадку незамкненої поверхні ці потенціали зображають багатозначні функції, які галуяться біля краю поверхні шару.

Розвинемо дослідження Шмідта на випадок бігармонічних потенціалів. Припускаємо, що всі розглядувані функції та поверхні аналітичні.

Нехай Σ – аналітична поверхня і M – точка поблизу її. Проведемо через M нормаль до Σ і позначимо через u, v, n відповідно координати основи цієї нормалі на Σ і відстань від M до Σ /довжину відрізку нормалі/. У цій системі координат $/ u, v, n /$ рівняння Лапласа має вигляд [I]

$$\Delta W = \Omega \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + D(W), \qquad /I/$$

де

$$\Omega = (EG - F^2)(1 - nK_1)^2 (1 - nK_2)^2;$$

E, G, F – коефіцієнти першої квадратичної форми; K_1, K_2 – головні кривини поверхні Σ; $D(W)$ – диференціальний вираз, який не містить $\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}$.

Якщо $f_i(u, v)$ $(i = \overline{1,4})$ – аналітичні функції своїх аргументів, то за теоремою Коші-Ковалевської в околі точки $/ u, v, 0 /$ існує аналітичний розв"язок рівняння $\Delta\Delta W = 0$, який задовольняє на Σ умови

$$W\Big|_{n=0} = f_1, \ \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{n=0} = f_2, \ \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\Big|_{n=0} = f_3, \ \frac{\partial^3 W}{\partial n^3}\Big|_{n=0} = f_4. \qquad /2/$$

Враховуючи формулу /I/, аналогічний висновок можна зробити і відносно існування аналітичного розв"язку задачі

$$\Delta\Delta W = 0, \qquad /3/$$

$$W\Big|_{n=0} = f_1,\ \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{n=0} = f_2,\ \Delta W\Big|_{n=0} = f_3,\ \frac{\partial \Delta W}{\partial n}\Big|_{n=0} = f_4. \qquad /4/$$

Розглянемо тепер бігармонічний потенціал простого шару

$$V(M) = \iint\limits_{\Sigma} \nu(P)\,\frac{z}{2}\,d_P S, \qquad /5/$$

де $z = |\overrightarrow{MP}|$ – відстань між точками M і $P \in \Sigma$.

Із інтегрального зображення бігармонічних функцій в областях, обмежених поверхнею Σ,

$$W(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial}{\partial n}\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right] d_P S \qquad /6/$$

випливає, що $V(M)$ можна розглядати як розв"язок задачі /3/ – /4/ при $f_1 = f_2 = f_3 = 0,\ f_4 = \nu(P)$. Тому, якщо $\nu(P)$ – аналітична функція, то із уже сказаного випливає можливість аналітичного продовження $V(M)$ із області, обмеженої поверхнею Σ, в область D_1, розташовану зовні Σ, тобто через поверхню Σ. Одержану в результаті такого продовження бігармонічну функцію позначимо як $U(M)$. Тоді, користуючись інтегральним зображенням бігармонічної функції, дістанемо наступне зображення для $V(M)$ в D_1:

$$V(M) = -4\pi U(M) + \iint\limits_{S_1}\Big[U(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\frac{\partial U(P)}{\partial n} -$$

$$- \Delta U(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{\partial \Delta U(P)}{\partial n}\Big] d_P S + \iint\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_1} \nu(P)\frac{z}{2}\,d_P S,$$

де $S = S_1 \cup \Sigma_1$ – границя D_1.

Можна показати, що продовжене значення $V(M)$ відрізняється від справжнього його значення на функцію $-4\pi U(M)$. Якщо Σ – незамкнена поверхня, тоді з цих результатів випливає багатозначність $V(M)$ у всьому евклідовому просторі, причому лінією галуження $V(M)$ є крива, що обмежує Σ.

Аналогічні міркування можна провести і для інших бігармонічних потенціалів.

Список літератури: I. К о в а л е в с к а я С. Об одной теории Брунса. – В кн.: Научные работы. М., I948. 2. Schmidt E. Math. Annalen, 1910, v. 68.

Стаття надійшла в радколегію I9.03.I979 р.

УДК 5I7.949.8

В.А.Бакалець, Н.Є.Коваль

МЕТОД НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Метод, запропонований у праці [I], поширюємо на розв"язування граничної задачі для бігармонічного рівняння на площині у випадку замкнених гладких кривих другого порядку, коли правою частиною рівняння є алгебраїчний поліном довільного степеня. На мові Фортран-IV для ЕОМ ЄС-I022 складена підпрограма, яка реалізує цей метод.

Розглянемо граничну задачу для бігармонічного рівняння

$$L\{u\} = P_n(x,y), \qquad /I/$$

$$u\big|_S = 0, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \qquad /3/$$

де $L = \alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \Gamma\frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $P_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня n вигляду

$$P_n(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j, \quad n = 0,1,2,\ldots;$$

S – замкнута гладка крива другого порядку, задана рівнянням

$$\omega(x,y) = 0.$$

Розв"язок задачі /I/–/3/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = \omega^2(x,y)\cdot\tilde{P}_n(x,y), \qquad /4/$$

де $\tilde{P}_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня n з невідомими коефі-