Список літератури: I. Ковалевская С. Об одной теории Брунса. – В кн.: Научные работы. М., 1948. 2. Schmidt E. Math. Annalen, 1910, v. 68.

Стаття надійшла в редколегію 19.03.1979 р.

УДК 517.949.8

В.А.Бакалець, Н.Є.Коваль

МЕТОД НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Метод, запропонований у праці [I], поширюємо на розв"язування граничної задачі для бігармонічного рівняння на площині у випадку замкнених гладких кривих другого порядку, коли правою частиною рівняння є алгебраїчний поліном довільного степеня. На мові Фортран-IV для ЕОМ ЄС-1022 складена підпрограма, яка реалізує цей метод.

Розглянемо граничну задачу для бігармонічного рівняння

$$l\{u\} = P_n(x,y), \qquad /1/$$

$$u\big|_S = 0, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \qquad /3/$$

де $l = \alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $P_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня n вигляду

$$P_n(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}\, x^i y^j, \quad n = 0,1,2,\ldots;$$

S – замкнута гладка крива другого порядку, задана рівнянням

$$\omega(x,y) = 0.$$

Розв"язок задачі /1/–/3/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = \omega^2(x,y)\cdot \tilde{P}_n(x,y), \qquad /4/$$

де $\tilde{P}_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня n з невідомими коефіцієнтами $\bar{a}_{ij}$.

$$\bar{P}_n(x,y)=\sum_{i+j=0}^{n}\bar{a}_{ij}x^i y^j.$$

Підставимо /4/ у /I/ і отримаємо тотожність

$$L[u_n(x,y)]\equiv P_n(x,y), \qquad /5/$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x та y, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{a}_{ij}$. Розв"язок задачі /I/ – /3/, зображений у вигляді /4/ з визначеними коефіцієнтами $\bar{a}_{ij}$, буде задовольняти як рівняння /I/, так і граничні умови /2/ – /3/.

Розглянемо конкретний випадок. Нехай S – еліпс, заданий рівнянням $\omega(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$. Тоді

$$u_n(x,y)=(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)^2\cdot\bar{P}_n(x,y),$$

а систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержану з /5/, запишемо так:

$$\begin{aligned}
&[\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)b^4+4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)a^2b^2+\\
&+\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a^4]\bar{a}_{ij}+[2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a^2b^2+\\
&+2\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)a^4]\bar{a}_{i+2,j-2}+\\
&+[2\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)b^4+\\
&+2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a^2b^2]\bar{a}_{i-2,j+2}+\\
&+\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a^4\bar{a}_{i+4,j-4}+\\
&+\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b^4\bar{a}_{i-4,j+4}+\\
&+\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a^4b^4\bar{a}_{i+4,j}+\\
&+\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a^4b^4\bar{a}_{i,j+4}+\\
&-2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a^4b^2\bar{a}_{i+4,j-2}-\\
&-[2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a^2b^4+4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)a^4b^2]\bar{a}_{i+2,j}-\\
&-[4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)a^2b^4+2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a^4b^2]\bar{a}_{i,j+2}-\\
&-2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a^2b^4\bar{a}_{i-2,j+4}=a_{ij}, \quad 0\le i+j\le n. \qquad /6/
\end{aligned}$$

[illegible] значення a_{ij} для деяких n :

$$n=0, \quad \bar{a}_{00}=\frac{a_{00}}{24\alpha b^4+16\beta a^2 b^2+24\gamma a^4};$$

$$n=1, \quad \bar{a}_{00}=\frac{a_{00}}{24\alpha b^4+16\beta a^2 b^2+24\gamma a^4},$$

$$\bar{a}_{01}=\frac{a_{01}}{24\alpha b^4+48\beta a^2 b^2+120\gamma a^4},$$

$$\bar{a}_{10}=\frac{a_{10}}{120\alpha b^4+48\beta a^2 b^2+24\gamma a^4}$$

і відповідні розв"язки /4/

$$u_0=\bar{a}_{00}\,\omega^2(x,y),$$

$$u_1=(\bar{a}_{00}+\bar{a}_{01}y+\bar{a}_{10}x)\,\omega^2(x,y).$$

Розмірність m матриці системи /6/ і степінь многочлена n правої частини /I/ зв"язані співвідношенням

$$m=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

звідки видно, що навіть при невеликих n порядок системи досить великий. Отже, знаходження розв"язків цієї системи при збільшенні степеня многочлена $P_n(x,y)$ процес досить громіздкий.

Тому одержання матриці системи /6/, а також знаходження розв"язку задачі /I/ – /3/ реалізовано на мові Фортран-IV для ЕОМ ЄС-I022 у вигляді підпрограми

DREAM (N, A, B, ALFA, BETA, GAMA, IV),

де N – степінь многочлена; A, B – півосі еліпса; ALFA, BETA, GAMA – коефіцієнти оператора L ; IV – параметр виводу на друк інформації про роботу DREAM . Якщо IV = I, то видруковується повна інформація про роботу DREAM , коли IV = 2 – друку немає.

Складена підпрограма обчислює вектор $\{REZ_i\}$, $i=\overline{1,NXY}$ – значення розв"язків задачі /I/ – /3/ у точках $(x_i,y_i), i=\overline{1,NXY}$, коли правою частиною рівняння є многочлен степеня K ($K \le 15$), а кривою S – еліпс з півосями C, D, розміщений у початку координат.

Масиви $\{a_{ij}\}_{i+j=\overline{0,n}}$, $\{x_i\}_{i=\overline{1,NXY}}$, $\{y_i\}_{i=\overline{1,NXY}}$ замовник повинен сформувати в основній програмі і описати оператором

COMMON /DREAM/ V(100), X(500), Y(500), REZ(500), NXY .

Розв"язок системи обчислює *SUBROUTINE BELG* методом Гаусса з вибором головного елемента.

Приклад. Розглянемо граничну задачу

$$\Delta\Delta u = -2x^2 + 5xy + y^2 + 5x - 6y + 0,2,$$

$$u\big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

де S – еліпс з півосями $A = 1$, $B = 0,5$.

В основній програмі сформовано масиви $\{a_{ij}\} = \{-2,0,\ 3,0,\ 1,0,\ 5,0,\ -6,0,\ 0,2\}$; $\{x_i\}$, $\{y_i\}$. При звертанні до підпрограми *CALL DREAM (2,1.,0.5,1.,1,1,1)* отримаємо значення розв"язку в точках (x_i, y_i) :

x_i	y_i	REZ_i
-0,I00000E 0I	0,0	0,0
-0,800000E 00	0,0	0,6284364E-03
-0,600000E 00	0,0	0,I634532E-02
-0,400000E 00	0,0	0,2083402E-02
-0,200000E 00	0,0	0,I638509E-02
-0,5960464-E-07	0,0	0,4237290E-03
0,I999999E 00	0,0	-0,I009764E-02
0,3999999E 00	0,0	-0,I96I767E-02
0,5999999E 00	0,0	-0,I89650OE-02
0,7999999E 00	0,0	-0,86I2I82E-03
0,9999999E 00	0,0	-0,50I6707E-I5

Відзначимо, що вимога нульових граничних умов для задачі /I/ – /3/ не зменшує її загальності. Наприклад, розглянемо задачу

$$\Delta^2 u = P_n(x,y),$$

$$u\big|_S = p_m(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = q_m(x,y).$$

У цьому випадку будуємо таку довільну функцію $v(x,y)$, що

$$v(x,y)\big|_S = p_m(x,y).$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial n}\Big|_s = q_m(x,y).$$

Зробивши заміну $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$, для $w(x,y)$ дістаємо задачу

$$\Delta^2 w = \tilde{P}_n(x,y),$$

$$w\big|_s = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_s = 0,$$

причому $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$.

Аналогічно не зменшує загальності вимога, щоб центр межі області знаходився у початку координат, що досягається відповідною заміною змінних. Якщо права частина бігармонічного рівняння - довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити алгебраїчним многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв"язком і отриманим нами, за теоремою Вейєрштрасса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x,y)$.

Список літератури: 1. Б а к а л е ц ь В.А., Л ю д к е в и ч Й.В. Метод неозначених коефіцієнтів розв"язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, № 15.
2. К а н т о р о в и ч Л.Б., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.: Физматгиз, 1962.

Стаття надійшла в редколегію 15.10.1979 р.

УДК 519.21

І.Д.Квіт

МАКСИМАЛЬНА ВЛАСТИВІСТЬ ЕНТРОПІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛА

У праці [1] розглянуто фізичні основи узагальненого розподілу Вейбула з густиною розподілу ймовірностей

$$w(t;a,b,\alpha,\beta) = \frac{b\alpha^{\beta}}{a^{b\beta}\Gamma(\beta)} e^{-\alpha\left(\frac{t}{a}\right)^{b}} t^{b\beta-1},\quad t>0,\ (a>0, b>0, \alpha>0, \beta>0). \qquad /1/$$