$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial n}\Big|_s = q_m(x,y).$$

Зробивши заміну $W(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$, для $W(x,y)$ дістаємо задачу

$$\Delta^2 W = \tilde{P}_n(x,y),$$

$$W\big|_s = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_s = 0,$$

причому $u(x,y) = v(x,y) + W(x,y)$.

Аналогічно не зменшує загальності вимога, щоб центр межі області знаходився у початку координат, що досягається відповідною заміною змінних. Якщо права частина бігармонічного рівняння - довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити алгебраїчним многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв"язком і отриманим нами, за теоремою Вейєрштрасса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x,y)$.

Список літератури: І. Бакалець В.А., Людкевич Й.В. Метод неозначених коефіцієнтів розв"язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, № 15.
2. Канторович Л.Б., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.: Физматгиз, 1962.

Стаття надійшла в редколегію 15.10.1979 р.

УДК 519.21

І.Д.Квіт

МАКСИМАЛЬНА ВЛАСТИВІСТЬ ЕНТРОПІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛА

У праці [1] розглянуто фізичні основи узагальненого розподілу Вейбула з густиною розподілу ймовірностей

$$w(t;a,b,\alpha,\beta) = \frac{b\alpha^{\beta}}{a^{b\beta}\Gamma(\beta)} e^{-\alpha\left(\frac{t}{a}\right)^{b}} t^{b\beta-1}, \quad t>0, (a>0, b>0, \alpha>0, \beta>0). \qquad /1/$$

Ентропія розподілу [2] з густиною /1/ дорівнює

$$\int_0^\infty w(t;a,b,\alpha,\beta)\log_2 w(t;a,b,\alpha,\beta)dt = \log_2 \frac{a\Gamma(\beta)e^{\beta+(\frac{1}{b}-\beta)\psi(\beta)}}{b\alpha^{\frac{1}{b}}}, \qquad /2/$$

де $\psi(\beta)=\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}$ – логарифмічна похідна гамма функції.

Т е о р е м а . Зі всіх абсолютно неперервних розподілів, заданих на додатній частині дійсної осі, що мають однакові початкові моменти порядку $b>0$ та однакові перші логарифмічні моменти, узагальнений розподіл Вейбула має найбільшу ентропію.

Справді, нехай абсолютно неперервна випадкова змінна з густиною $f(t)$, $t>0$ має початковий момент порядку $b>0$

$$\int_0^\infty t^b f(t)dt = \int_0^\infty t^b w(t;a,b,\alpha,\beta)dt = \frac{\beta}{\alpha}a^b \qquad /3/$$

та перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty f(t)\ln t\,dt = \int_0^\infty w(t;a,b,\alpha,\beta)\ln t\,dt = \ln\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{b}}} + \frac{\psi(\beta)}{b}. \qquad /4/$$

Тоді, використовуючи інтеграл

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-qx}\ln x\,dx = \frac{1}{q^p}\Gamma(p)[\psi(p)-\ln q],\ (p>0,\ q>0), \qquad /5/$$

де

$$\psi(1)=-C;\ C=0{,}5772157;\ \psi(n)=-C+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1},\ (n=2,3,\dots);$$

$$\psi(\tfrac{1}{2})=-C-2\ln 2=-\ln(4e^C)=-1{,}9635100260\dots; \qquad /6/$$

$$\psi(n+\tfrac{1}{2})=-\ln(4e^C)+2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right),\ (n=1,2,\dots);$$

C – стала Ейлера [3], та умови /3/ і /4/, приходимо до висновку,

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 w(t;a,b,\alpha,\beta)dt = \log_2\frac{a\Gamma(\beta)e^{\beta+(\frac{1}{b}-\beta)\psi(\beta)}}{b\alpha^{\frac{1}{b}}}. \qquad /7/$$

Отже, різницю

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt - \log_2\frac{a\Gamma(\beta)e^{\beta+(\frac{1}{b}-\beta)\psi(\beta)}}{b\alpha^{\frac{1}{b}}}, \qquad /8/$$

враховуючи /7/, запишемо як

$$\int_0^{\infty} f(t) \log_2 \frac{w(t;a,b,\alpha,\beta)}{f(t)}\, dt. \qquad /9/$$

За нерівністю Остроградського

$$\log_2 x \leq (x-1)\log_2 e, \quad x>0$$

для виразу /9/ дістаємо нерівність

$$\int_0^{\infty} f(t)\log_2 \frac{w(t;a,b,\alpha,\beta)}{f(t)}\, dt \leq \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{w(t;a,b,\alpha,\beta)}{f(t)} - 1\right](\log_2 e)\, dt = 0. \qquad /10/$$

Оскільки вираз зліва у нерівності /10/ дорівнює різниці /8/, то одержуємо нерівність

$$-\int_0^{\infty} f(t)\log_2 f(t)\, dt \leq \log_2 \frac{a\Gamma(\beta)e^{\beta+(\frac{1}{b}-\beta)\psi(\beta)}}{b\alpha^{\frac{1}{b}}}, \qquad /11/$$

що є змістом теореми.

Відзначимо, що узагальнений розподіл Вейбула включає такі розподіли як експонентний, хі-квадрат, Ерланга, гамма, Максвелла, Релея та Вейбула. Запишемо густини й ентропії цих розподілів:

Розподіл	Густина	Ентропія
Експонентний	$w(t;1,1,\alpha,1), (\alpha>0)$	$\log_2 \frac{e}{\alpha}$
Хі-квадрат	$w(t;1,1,\frac{1}{2},\frac{n}{2}), (n=1,2,\dots)$	$\log_2[2\Gamma(\frac{n}{2})e^{\frac{n}{2}+(1-\frac{n}{2})\psi(\frac{n}{2})}]$
Ерланга	$w(t;1,1,\alpha,N), (\alpha>0; N=2,3,\dots)$	$\log_2[\frac{\Gamma(N)}{\alpha}e^{N+(1-N)\psi(N)}]$
Гамма	$w(t;1,1,\alpha,\beta), (\alpha>0, \beta>0)$	$\log_2[\frac{\Gamma(\beta)}{\alpha}e^{\beta+(1-\beta)\psi(\beta)}]$
Максвелла	$w(t;1,2,\alpha,\frac{3}{2}), (\alpha>0)$	$\log_2(e^{C}\sqrt{\frac{\pi}{e\alpha}})$
Релея	$w(t;\sigma\sqrt{2},2,1,1), (\sigma>0)$	$\log_2(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}e^{1+\frac{C}{2}})$
Вейбула	$w(t;a,b,1,1), (a>0, b>0)$	$\log_2(\frac{a}{b}e^{1+(1-\frac{1}{b})C})$

Очевидно, що для кожного з сімох розподілів теорема відповідно уточнюється.

П р и к л а д . Перевірити, що коли логарифмічно нормальний розподіл має початковий момент порядку $b>0$ і перший логарифмічний момент такі самі як для розподілу Вейбула, то ентропія розподілу Вейбула більша від ентропії логарифмічно нормального розподілу.

Справді, логарифмічно нормальний розподіл з густиною

$$f(t)=\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad ,t>0,(\sigma>0)$$

має початковий момент порядку $b>0$

$$\int_0^\infty t^b f(t)dt=e^{\mu b+\frac{1}{2}\sigma^2 b^2}\quad ,$$

перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty f(t)\ln t\,dt=\mu$$

і ентропію

$$\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt=\log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}\;e^{\mu}).$$

Розподіл Вейбула з густиною

$$w(t;a,b,1,1)=\frac{b}{a^b}e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}t^{b-1},\quad t>0,(a>0,b>0)$$

має початковий момент порядку $b>0$

$$\int_0^\infty t^b w(t;a,b,1,1)\,dt=a^b,$$

перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty w(t;a,b,1,1)\ln t\,dt=\ln(ae^{-\frac{c}{b}})$$

і ентропію

$$-\int_0^\infty w(t;a,b,1,1)\log_2 w(t;a,b,1,1)dt=\log_2\left(\frac{a}{b}e^{1+(1-\frac{1}{b})c}\right).\quad /12/$$

За умовою відповідні моменти однакові

$$e^{\mu b+\frac{1}{2}\sigma^2 b^2}=a^b\;,\quad \mu=\ln(ae^{-\frac{c}{b}}).$$

Звідси

$$\mu=\ln(ae^{-\frac{c}{b}}),\quad \sigma^2=\frac{2c}{b^2}\;.$$

При цих значеннях параметрів ентропія логарифмічно нормального розподілу дорівнює

$$\log_2\left(\frac{2a\sqrt{c e\pi}}{b}\;e^{-\frac{c}{b}}\right)$$

і є меншою від ентропії /12/ розподілу Вейбула, оскільки

$$2\sqrt{2\pi} = 2,69\ldots < e^{C+0,5} = 2,93\ldots$$

Зауважимо, що з нерівностей для ентропії можна дістати багато цікавих нерівностей для функцій. Наприклад, якщо порівнювати ентропію логнормального розподілу з ентропією узагальненого розподілу Вейбула при однакових початковому моменті порядку $\beta > 0$ та першому логарифмічному моменті, то з умови додатності дисперсії одержимо нерівність $\psi(x) < \ln x$, $x > 0$.

Список літератури: 1. К в і т І.Д., М о с к в я к Є.В. Розподіли деяких процесів руйнування. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 15. 2. К в і т І.Д. Ентропія розподілів. Вид-во Львів. ун-ту, 1971. 3. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 18.12.1979 р.

УДК 539.3

І.А.Прокопішин, Д.Г.Хлєбніков

НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В ЕКРАННОМУ ВУЗЛІ КІНЕСКОПА З ПЛОСКИМ ЕКРАНОМ

Екранний вузол кінескопа розглядається як трипластинчаста система, що знаходиться під дією зовнішнього тиску інтенсивності p і заданого температурного поля, симетричного відносно площин $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$ /рис.1/.

З огляду на симетрію обмежимось розглядом пластинок 1 і 2, серединні площини яких займають відповідно області $0 \le x \le a$, $y_2 = 0$, $0 \le y_1 \le b$ і $0 \le x \le a$, $y_1 = 0$, $0 \le y_2 \le c$.

Прогини пластинок w_1 і w_2 задовольняють рівняння [1, 2]

$$\Delta^2_{xy_i} w_i = \frac{p}{D_i} - \alpha (1+\nu) \Delta_{xy_i} T_i\,, \quad i = 1,2, \qquad /1/$$