Таким чином, розв"язуючи задачі про пружну рівновагу криволінійних труб в переміщеннях шляхом мінімізації функціоналу Лагранжа за вказаною схемою МСЕ, різницею радіусів волокон серединної поверхні нехтувати не можна.

Список літератури: I. А к с е л ь р а д Э.Л. Гибкие оболочки. - М.: Наука, 1976. 2. А к с е л ь р а д Э.Л., И л ь и н В.П. Расчет трубопроводов. - Л.: Машиностроение, 1972. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 4. С а в у л а Я.Г., Ф л е й ш м а н Н.П., Ш и н к а р е н к о Г.А. Метод расчета труб с произвольной криволинейной осью. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978, № 32. 5. Ч е р н ы х К.Ф. Линейная теория оболочек. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. Т.2.

Стаття надійшла в редколегію 13.11.1979 р.

УДК 539.3

Р.І.Мокрик, Ю.А.Паздерський, В.Ф.Кочубей,
І.М.Гутор, І.В.Оліярник

СТАЦІОНАРНИЙ ТЕПЛООБМІН ПРИ РУСІ ГАЗУ МІЖ ДВОМА СПІВОСНИМИ КРУГОВИМИ ЦИЛІНДРАМИ

Питання теплообміну в потоці в"язкого газу вивчено ще недостатньо. У праці [4] методом "стержньової" моделі проаналізовано температурне поле в турбулентному потоці газу. Нестаціонарний теплообмін в суцільній трубі в ламінарному потоці газу досліджено в працях [1, 3].

Ми розглядаємо задачу про визначення температурного поля в"язкого газу, який рухається між двома співосними круговими циліндрами радіусів r_1 і r_2 / $r_2 > r_1$ / за умови, що газ нестисливий, теплофізичні параметри його постійні, теплопровідність у напрямі осі симетрії z відсутня. Нехтуємо також тепловідводом за рахунок дисипації енергії.

Припускаємо, що температура зовнішньої і внутрішньої границі яка обмежує потік, підтримується постійною при відповідно величинах

T_1^* і T_2^*, а газ входить у досліджувану область зі сталими по поперерізу температурою T_0 і швидкістю W_z^0.

За цих умов внаслідок осьової симетрії задача визначення температурного поля газу зводиться до розв"язування рівняння енергії теплопровідного в"язкого газу

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} = P_e W_\zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \qquad /I/$$

при граничних умовах:

$$\begin{aligned} &\zeta = 0 \quad T(\rho, 0) = 1, \\ &\rho = 1 \quad T(1, \zeta) = T_1, \\ &\rho = N \quad T(N, \zeta) = T_2, \end{aligned} \qquad /2/$$

де $T = T(\rho,\zeta)$ – безрозмірна температура, що дорівнює температурі потоку, віднесеній до величини температури на вході T_0, $T_1 = \frac{T_1^*}{T_0}$

$T_2 = \frac{T_2^*}{T_0}$; $\rho = \frac{r}{r_1}$; $\zeta = \frac{z}{r_1}$; $N = \frac{r_2}{r_1}$; $P_e = \frac{W_z^0 r_1}{K}$ – критерій Пекле; $K = a + \varepsilon_q$; a – коефіцієнт температуропровідності; ε_q – коефіцієнт турбулентної температуропровідності.

Нелінійний профіль швидкості W_ζ течії Пуазейля між співвісними циліндричними поверхнями [2], апроксимуючи поліномом другого степеня, запишемо у вигляді

$$W_\zeta = \sum_{K=0}^{2} a_K \rho^K, \qquad /3/$$

де

$$a_0 = bN; \quad a_1 = -b(1+N); \quad a_2 = b;$$

$$b = \frac{\Delta P r_1^2}{\mu l W_z^0}\left[\frac{(N-1)^2 - 2}{2(N-1)^2} + \frac{\ln(N+1)}{\ln(N)}\right];$$

ΔP – постійний перепад тиску на відстані l; μ – коефіцієнт в"язкості газу.

Розв"язок задачі /I/ – /3/ зобразимо як

$$T(\rho,\zeta) = u_0(\rho,\zeta) + u_1(\rho,\zeta) + u_2(\rho,\zeta), \qquad /4/$$

де u_0 – розв"язок крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial \rho} = P_e a_0 \frac{\partial u_0}{\partial \zeta},$$

$$u_0\Big|_{\zeta=0} = 1;\ u_0\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{3}T_1;\ u_0\Big|_{\rho=N} = \frac{1}{3}T_2, \qquad /5/$$

а u_1 і u_2 – відповідно крайових задач

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \rho} = P_e a_n \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial \zeta};\quad n = 1,2, \qquad /6/$$

$$u_n\Big|_{\zeta=0} = 0;\ u_n\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{3}T_1;\ u_n\Big|_{\rho=N} = \frac{1}{3}T_2.$$

Для знаходження розв"язків крайових задач /5/, /6/ скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа по змінній ζ :

$$\bar{u}_n(\rho,s) = \int_0^\infty u_n(\rho,\zeta)e^{-s\zeta}d\zeta, \qquad /7/$$

$$u_n(\rho,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{u}_n(\rho,s)e^{s\zeta}ds. \qquad /8/$$

Тоді для визначення трансформанти Лапласа функції u_0 отримаємо наступну граничну задачу:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho} = P_e a_0(s\bar{u}_0 - 1), \qquad /9/$$

$$\bar{u}_0\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{3}\frac{T_1}{s};\ \bar{u}_0\Big|_{\rho=N} = \frac{1}{3}\frac{T_2}{s}$$

і відповідно для u_1 та u_2

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \rho} = P_e a_n \rho^n s\bar{u}_n,$$

$$n = 1,2,$$

$$\bar{u}_n\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{3}\frac{T_1}{s};\ \bar{u}_n\Big|_{\rho=N} = \frac{1}{3}\frac{T_2}{s}. \qquad /10/$$

Розв"язки задач /9/-/10/ мають вигляд

$$\bar{u}_0(\rho,s)=\frac{1}{s}\left[1+\left(\frac{1}{3}T_1-1\right)\frac{F_{11}(\rho,\beta)}{F_{10}(\rho,\beta)}-\left(\frac{1}{3}T_2-1\right)\frac{F_{01}(\rho,\beta)}{F_{10}(\rho,\beta)}\right],$$

$$\bar{u}_1(\rho,s)=\frac{1}{3s}\left[T_1\frac{F_{3/2,3/2}(\rho,\beta')}{F_{3/2,0}(\rho,\beta')}-T_2\frac{F_{0,3/2}(\rho,\beta')}{F_{3/2,0}(\rho,\beta')}\right], \qquad /II/$$

$$\bar{u}_2(\rho,s)=\frac{1}{3s}\left[T_1\frac{F_{2,2}(\rho,\beta'')}{F_{2,0}(\rho,\beta'')}-T_2\frac{F_{0,2}(\rho,\beta'')}{F_{2,0}(\rho,\beta'')}\right],$$

де

$$F_{m,n}(\rho,\beta)=J_0(\rho^n\beta)Y_0(N^m\beta)-J_0(N^m\beta)Y_0(\rho^n\beta);$$

$$\beta=\sqrt{-\alpha_0 sP_e}\ ;\ \beta'=\frac{2}{3}\sqrt{-\alpha_1 sP_e}\ ;\ \beta''=\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_2 sP_e}\ ;$$

$J_0(x), Y_0(x)$ – функції Бесселя першого і другого роду нульового порядку.

Застосовуючи до /II/ формулу обернення інтегрального перетворення Лапласа і враховуючи /4/, дістаємо функцію розподілу температурного поля, яка є розв'язком поставленої задачі /I/ – /3/, у вигляді:

$$T(\rho,\xi)=1+\left(\frac{1}{3}T_1-1\right)\left[W^1_{1,1}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{1,1}(\rho,\beta^0_m)}{M_1(\beta^0_m)}\exp\left(-L_0(\beta^0_m)\xi\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{1}{3}T_2-1\right)\left[W^0_{1,1}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{01}(\rho,\beta^0_m)}{M_1(\beta^0_m)}\exp\left(-L_0(\beta^0_m)\xi\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{3}T_1\left[W^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{3/2,3/2}(\rho,\beta'_m)}{M_{\frac{3}{2}}(\beta'_m)}\exp\left(-\frac{9}{4}L_1(\beta'_m)\xi\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{3}T_2\left[W^0_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{0,3/2}(\rho,\beta'_m)}{M_{3/2}(\beta'_m)}\exp\left(-\frac{9}{4}L_1(\beta'_m)\xi\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{3}T_1\left[W'_{2,2}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{2,2}(\rho,\beta_m^2)}{M_2(\beta_m^2)}\exp(-4L_2(\beta_m^2)\xi)\right]-$$

$$-\frac{1}{3}T_2\left[W^0_{2,2}(\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{2,2}(\rho,\beta_m^2)}{M_2(\beta_m^2)}\exp(-4L_2(\beta_m^2)\xi)\right], \qquad /I2/$$

де

$$M_\alpha(\beta)=\beta\left[P_\alpha(\beta)+N^\alpha Q_\alpha(\beta)\right];$$

$$W^\mu_{\gamma,\alpha}(\rho)=\frac{\rho^\gamma-N^\mu}{1-N^2}\ ;\ L_j(\beta)=\frac{\beta^2}{\alpha_j P_e};$$

$$P_\alpha(\beta)=Y_1(\beta)J_0(N^{1+\frac{\alpha}{2}}\beta)-J_1(\beta)Y_0(N^{1+\frac{\alpha}{2}}\beta);$$

$$Q_\alpha(\beta)=J_1(N^{1+\frac{\alpha}{2}}\beta)Y_0(\beta)-J_0(\beta)Y_1(N^{1+\frac{\alpha}{2}}\beta);$$

β_m^α – відповідно коренями рівняння

$$J_0(\beta)Y_0(\beta N^{1+\frac{\alpha}{2}})-J_0(\beta N^{1+\frac{\alpha}{2}})Y_0(\beta)=0.$$

Відзначимо, що на основі формули /I2/ можна отримати розв"язок аналогічної задачі, коли на межах області задані теплові потоки, або на одній межі тепловий потік, а на іншій температура.

Список літератури: I. А л е к с а ш е н к о В.А. Сопряженная стационарная задача теплообмена в полубесконечной трубе с движущейся жидкостью с учетом диссипации механической энергии. – ИФЖ, I968, т.I4. 2. Л о й ц я н с к и й Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, I970. 3. П е т у х о в Б.М. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, I967. 4 Stein R.P. Engineering relationships for turbulent forced convection heat transfer in ducts with flux transients - Report of Engeeniring and Techology Division Argonne National Laboratory. ANL-7154, November 2. 1970.

Стаття надійшла в редколегію I0.02.I980 р.