Р.І.Мокрик, І.В.Олійник

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ"ЯЗКИ ТЕРМОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПСЕВДОКОЛИВАНЬ

Як відомо [1, 2] у загальному випадку зв"язок між деформаціями і напруженнями для термов"язкопружного тіла задається співвідношеннями

$$\begin{cases} P_1(d)s_{ij} = P_2(d)e_{ij}, \\ P_3(d)\sigma_{kk} = P_4(d)(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_T T); \end{cases} \qquad /1/$$

де

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk},$$

$$P_i(d) = \sum_{n=0}^{N_i} a_i^{(n)} d^{(n)}, \quad i = 1,2,3,4; \quad d^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$

У випадку моделі Біо залежності між компонентами напруженого і деформованого стану мають такий вигляд:

$$\sigma_{ij}(t) = 2\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau}d\tau + \delta_{ij}\left\{\int_0^t b(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \tau}d\tau - \int_0^t [3b(t-\tau)+2a(t-\tau)]\alpha_t \frac{\partial T}{\partial \tau}d\tau\right\}, \qquad /2/$$

де $a(t)$, $b(t)$ – функції часу, які у випадку ідеально пружного тіла відповідають постійним Ламе μ_0 і λ_0.

З формул /1/ випливають часткові випадки:

ідеально пружне тіло

$$P_1(d) = 1; \quad P_2(d) = 2\mu_0; \quad P_3(d) = 1; \quad P_4(d) = 3K_0;$$

тіло Фойхта або Кельвіна

$$P_1(d) = 1; \quad P_2(d) = 2\mu_0(1 + \tau_K d); \quad P_3(d) = 1; \quad P_4(d) = 3K_0; \qquad /3/$$

тіло Максвелла

$$P_1(d) = (1 + \tau_M d)\frac{1}{2\mu_0 \tau_M}; \quad P_2(d) = d; \quad P_3(d) = 1; \quad P_4(d) = 3K_0, \qquad /4/$$

де K_0 – об"ємний модуль пружності ідеально пружного тіла; τ_K, τ_M – час релаксації тіл Кельвіна та Максвелла.

З /І/, /2/ випливає система рівнянь термов"язкопружності:

$$M(\vec{u})=0,$$

$$\Delta T-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\gamma\, div\dot{\vec{u}}-\gamma\tau_2\, div\ddot{\vec{u}}=0, \qquad /5/$$

де $M(\vec{u})$ дорівнює

у випадку формули /І/

$$M(\vec{u})=L_1(d)\Delta\vec{u}+L_2(d)\,grad\,div\vec{u}-L_3(d)\alpha_T\,grad\,T-L_4(d)\rho\ddot{\vec{u}}$$

$$L_1(d)=P_2(d)P_3(d);\; L_2(d)=\frac{1}{3}\left[2P_4(d)P_1(d)+P_2(d)P_3(d)\right] \qquad /6/$$

$$L_3(d)=2P_4(d)P_1(d);\; L_4(d)=2P_1(d)P_3(d);$$

у випадку формули /2/

$$M(\vec{u})=\int_0^t\left\{a(t-\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}(\Delta\vec{u})+[a(t-\gamma)+b(t-\gamma)]\frac{\partial}{\partial\gamma}\,grad\,div\vec{u}\right\}d\gamma-\int_0^t c(t-\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}\,grad\,T\,d\gamma- \qquad /7/$$

$$-\rho\ddot{\vec{u}};\qquad c(t)=[3b(t)+2a(t)]\alpha_T.$$

Система рівнянь /5/ для випадку псевдоколивань набуває вигляду

$$B(\partial_x,\omega)\cdot U=0, \qquad /8/$$

де

$$U=\begin{pmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\\ \bar{u}_3\\ \bar{T}\end{pmatrix};\quad B_{ij}=(\bar{\lambda}+\bar{\mu})\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\delta_{ij}(\bar{\mu}\Delta+\omega^2\rho)\quad i,j=1,2,3;$$

$$B_{4j}=-\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial x_j}\quad j=1,2,3;\quad B_{i4}=(\gamma i\omega+\gamma\omega^2\tau_2)\frac{\partial}{\partial x_i}\quad i=1,2,3;\quad B_{44}=\Delta+\frac{i\omega}{a}+\frac{\omega^2}{c_q^2};$$

$$\bar{\mu}=\frac{P_2(\omega)}{2P_1(\omega)};\;\bar{\lambda}=\frac{P_1(\omega)P_4(\omega)-P_2(\omega)P_3(\omega)}{3P_1(\omega)P_3(\omega)}\text{ у випадку /І/;} \qquad /9/$$

$$\bar{\mu}=-i\omega\bar{a},\;\bar{\lambda}=-i\omega\bar{b}\quad\text{у випадку /2/;} \qquad /10/$$

$$det\,B(\partial_x\,\omega)=\bar{\mu}^2(\bar{\lambda}+2\bar{\mu})(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2;$$

$$\begin{cases}\lambda_1^2+\lambda_2^2=\dfrac{i\omega}{a}+\dfrac{\omega^2}{c_q^2}+\dfrac{\gamma i\omega+\gamma\tau_2\omega^2}{\bar{\lambda}+2\bar{\mu}}\bar{\beta}+\dfrac{\rho\omega^2}{\bar{\lambda}+2\bar{\mu}},\\ \lambda_1^2\cdot\lambda_2^2=\left(\dfrac{i\omega}{a}+\dfrac{\omega^2}{c_q^2}\right)\dfrac{\rho\omega^2}{\bar{\lambda}+2\bar{\mu}},\\ \lambda_3^2=\dfrac{\rho\omega^2}{\bar{\mu}}:\end{cases} \qquad /11/$$

За аналогією до праці [3] введемо матрицю фундаментальних розв"язків системи /8/:

$$\Phi(x,\omega) = \| \Phi_{kj} \|_{4\times 4}$$

$$\Phi_{kj} = \sum_{n=1}^{3} \Big\{ (1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\Big(\frac{\delta_{kj}}{2\bar{\mu}\pi}\delta_{3n} - \alpha_n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\Big) + \gamma_n \Big[(i\omega\eta + \omega^2\eta\tau_2)\delta_{k4}(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j} -$$

$$- \beta\delta_{j4}(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\Big] + \delta_{k4}\delta_{j4}\rho_n \Big\} \frac{\exp(i\lambda_n |x|)}{|x|} , \qquad /I2/$$

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n \big[1 - \big(\frac{i\omega}{\alpha} + \frac{\omega^2}{c_g^2}\big)\lambda_n^{-2}\big](\delta_{1n} + \delta_{2n})}{2\pi(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{3n}}{2\pi\rho\omega^2} , \quad \sum_{n=1}^{3} \alpha_n = 0 ,$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n(\delta_{1n} + \delta_{2n})}{2\pi(\bar{\lambda}+2\bar{\mu})(\lambda_2^2-\lambda_1^2)} ; \quad \sum_{n=1}^{3}\gamma_n = 0 ; \quad \rho_n = \frac{(-1)^n(\lambda_n^2 - k_1^2)(\delta_{1n}+\delta_{2n})}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} ,$$

$$\sum_{n=1}^{3} \rho_n = 1 , \qquad k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\bar{\lambda}+2\bar{\mu}} .$$

Легко перевірити, що кожний вектор-стовпець у фундаментальній матриці $\Phi(x,\omega)$ має єдину особливість у точці $x = 0$ порядку не вище $|x|^{-1}$. Крім цього, з /I2/ випливає така теорема.

Т е о р е м а I. Кожний вектор-стовпець матриці $\Phi(x,\omega)$ задовольняє систему /8/ всюди в просторі R^3 за винятком початку координат.

Властивості фундаментальних розв"язків.

У випадку моделі Біо при

$$a(t) = \mu_0 \exp(-\varepsilon t) ; \; b(t) = \lambda_0 \exp(-\varepsilon t) , \qquad /I3/$$

де ε^{-1} – час релаксації, з /I0/ випливає

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{\omega}{\omega + i\varepsilon} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \frac{\omega}{\omega + i\varepsilon} . \qquad /I4/$$

Для тіла Фойгта /або Кельвіна/ $\bar{\lambda}$ і $\bar{\mu}$ дорівнюють

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \tfrac{2}{3}\mu_0 i\omega\tau_k ; \quad \mu = \mu_0(1 - i\omega\tau_k) . \qquad /I5/$$

У випадку моделі Максвелла

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \tfrac{2}{3}\mu_0 \frac{i\tau_M^{-1}}{\omega + i\tau_M^{-1}} ; \quad \bar{\mu} = \mu_0\Big(1 - \frac{i\tau_M^{-1}}{\omega + i\tau_M^{-1}}\Big) . \qquad /I5/$$

Для даних моделей характеристичні параметри λ_K $(K=1,2,3)$ мають такі властивості:

а/ при $|\omega|\to\infty$ і $Jm\,\omega>0$, $\lambda_K\sim O(|\omega|)$, $K=1,2,3$,

б/ $Jm\,\lambda_K>0$ при $Jm\,\omega>0$,

$Re\,\lambda_K \gtrless 0$ при $Re\,\omega \gtrless 0$.

Властивість а/ випливає безпосередньо з формули /II/. Доведення властивості б/ для λ_K $(K=1,2)$ /для параметра λ_3 дана властивість є очевидною/ базується на аналізі на відповідних листах рімановоі поверхності характеристичних параметрів λ_K $(K=1,2)$ функцій:

$$p(\omega)=\sqrt{\omega} \quad \text{і} \quad q_K(\omega)=\sqrt{\Psi_K(\omega)},$$

де

$$\Psi_K(\omega)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{i}{a}+\frac{\omega}{c_2^2}+\frac{\gamma i+\gamma\tau_2\omega}{\lambda+2\bar\mu}\bar\beta+\frac{\rho\omega}{\lambda+2\bar\mu}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{i}{a}+\frac{\omega}{c_2^2}+\frac{\gamma i+\gamma\tau_2\omega}{\lambda+2\bar\mu}\bar\beta+\frac{\rho\omega}{\lambda+2\bar\mu}\right)^2-4\frac{\rho\omega}{\lambda+2\bar\mu}\left(\frac{i}{a}+\frac{\omega}{c_2^2}\right)}\right\}$$

причому $\lambda_K=p(\omega)\cdot q_K(\omega)$.

Т е о р е м а 2. Елементи матриці фундаментальних розв'язків $\varphi(x,\omega)$ системи /8/ є регулярними функціями комплексної змінної ω у півплощині $Jm\,\omega>0$.

Твердження цієї теореми випливає з аналітичності у півплощині $Jm\,\omega>0$ виразів

$$\beta_1=\frac{exp\,(i\lambda_1|x|)-exp\,(i\lambda_2|x|)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2},$$

$$\beta_2=\frac{\lambda_2^2\,exp\,(i\lambda_1|x|)-\lambda_1^2\,exp\,(i\lambda_2|x|)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}.$$

Регулярність β_1 і β_2 у півплощині $Jm\,\omega>0$ випливає з регулярності функцій

$$I_1=\frac{sin\,(p(\omega)\,\gamma_1(\omega))}{p(\omega)}, \quad I_2=cos\,(p(\omega)\,\gamma_2(\omega)),$$

де

$\gamma_1(\omega)=\gamma(\omega)\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k}\,p^{2k}(\omega)|x|$ – регулярна функція з $Jm\,\omega>0$;

$f_2(\omega)=\gamma(\omega)\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\,\rho^{2k}(\omega)\,|x|$ – регулярна функція в $Im\,\omega > 0$

на основі теореми про узагальнені аналітичні функції [2].

Список літератури: I. И л ь ю ш и н А.А., П о б е д р я Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. 2. Е в г р а ф о в М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1965. 3. К у п р а д з е В.Д., Г е г е л и а Т.Г., Б а ш е л е й ш в и л и М.О., Б у р ч у л а д з е Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 10.02.1980 р.

УДК 539.311

В.К.Опанасович, М.С.Драган

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА З ТОНКОСТІННИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо задачу рівноваги тіла з тонкостінним пружним включенням сталої ширини $2a$ і товщини $2h$. Тіло перебуває під дією зосереджених силових факторів і однорідного поля напружень на безмежності в умовах антиплоскої деформації /рис. I/.

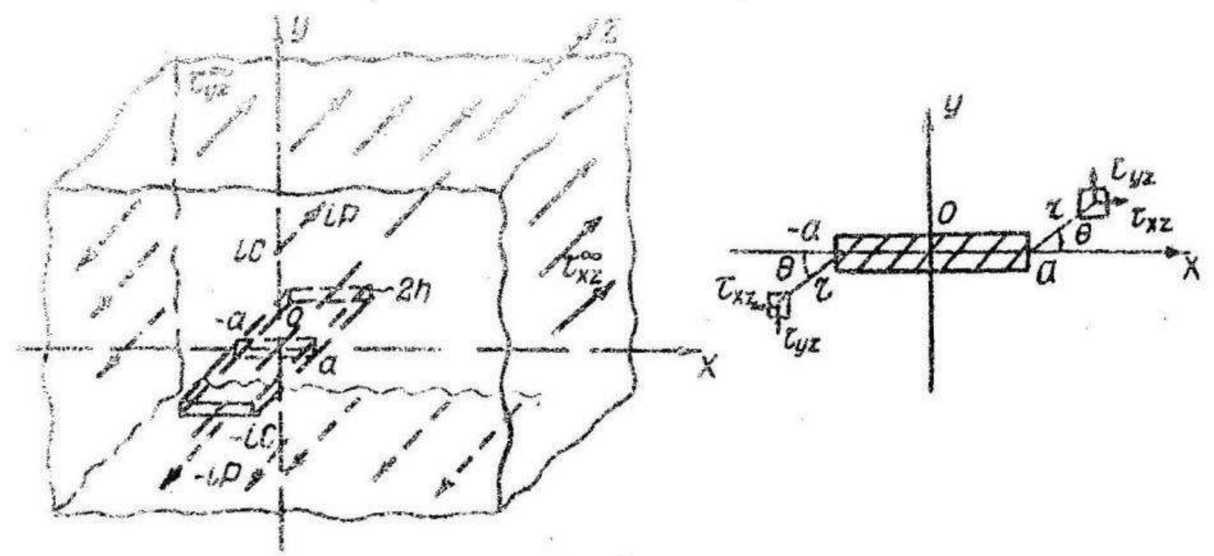

Рис. I.