

$f_2(\omega) = f_1(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \rho^{2k}(\omega) / \omega$ - регулярна функція в $\text{Im} \omega > 0$

на основі теореми про узагальнені аналітичні функції [2].

Список літератури: І. Ільїн А.А., Победра Б.В. Основи математической теории термоупругости. - М.: Наука, 1970.
 2. Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Наука, 1965.
 3. Купрадзе В.Д., Гегелія Т.Г., Бачелайшвілі М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - М.: Наука, 1976.

Стаття надійшла в редакцію 10.02.1980 р.

UDC 639.311

В.Л.Григорук, М.С.Драган

АНТИКЛОСНА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА

І ТОНКОПЛОСНА ПРУЖИНА ІСНУЮЧОГО

Розглянуто пружну деформацію тіла з тонкоплоским пружним вклиненим шаром висотою $2h$ і розміром $2a$. Тіло перебуває під дією зосереджених сил у центрі і однорідного поля напружень на безконечності в умовах антикломної деформації (рис. 1).

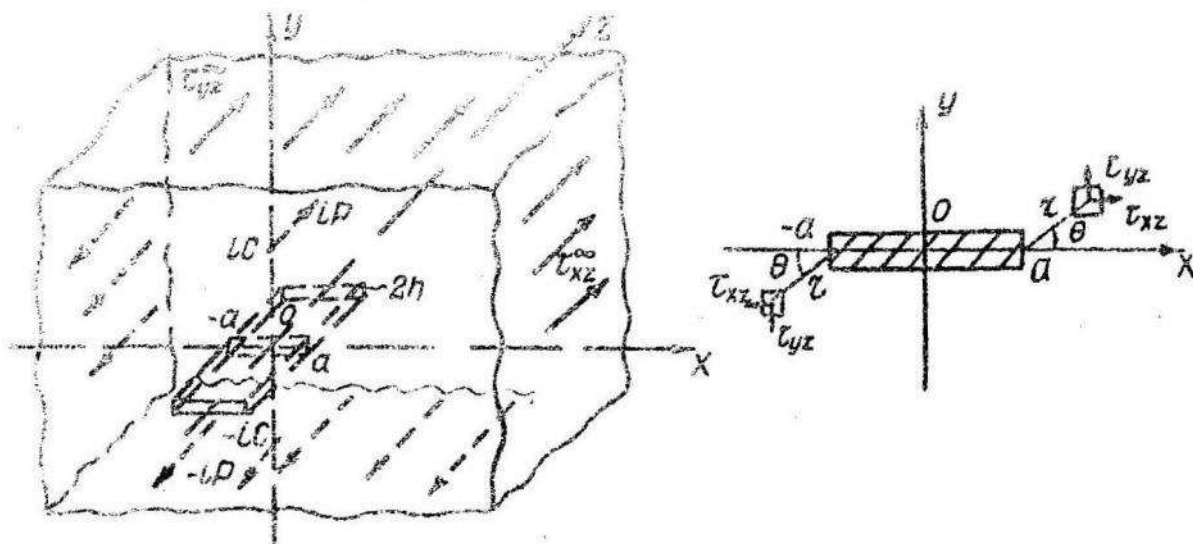


Рис. 1.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, позначимо з індексом нуль, знаками плюс і мінус – граничні значення функцій на верхньому та нижньому берегах включення, сегмент дійсної осі $[-a, a]$ – через L .

На берегах включення наявні умови спав

$$\tau_{yz}^+ = (\tau_{yz})_0^+, W^+ = W_0^+. \quad /1/$$

Як відомо [3], компоненти тензора напружень τ_{xz}, τ_{yx} переміщення w виражаються через одну аналітичну функцію $f(z)$

$$W(x, y) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z), \tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z), \quad /2/$$

де μ – модуль зсуву матриці.

Для тонкостінного включення можемо записати аналогічно як у праці [2]:

$$(\tau_{yz})_0^+ - (\tau_{yz})_0^- = h Q_1'(x), (\tau_{yz})_0^+ + (\tau_{yz})_0^- = P_1(x), \quad /3/$$

$$(W_0^+ - W_0^-)' = \frac{h}{\mu_0} P_1'(x), (W_0^+ + W_0^-)' = \frac{1}{\mu_0} Q_1(x),$$

де $P_1(x), Q_1(x)$ – невідомі функції.

Виходячи з /1/ і беручи до уваги /2/ і /3/, одержуємо такі крайові задачі:

$$F^+(x) - F^-(x) = h \left[\frac{\mu}{\mu_0} P_1'(x) + i Q_1'(x) \right], \quad /4/$$

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{\mu}{\mu_0} [Q_1(x) + \varepsilon Q_0(x)] - i [P_1(x) + \varepsilon P_0(x)], \quad /5/$$

де

$$Q_0(x) - i P_0(x) = 2 F_0(x); \varepsilon = \frac{\min(\mu_0, \mu)}{\mu};$$

$$P(x) = P_1(x) - \varepsilon P_0(x); Q(x) = Q_1(x) - \varepsilon Q_0(x);$$

$F_0(z)$ – розв'язок задачі для тіла без включення; $Q_0(x)$ і $P_0(x)$ – дійсні функції.

Розв'язок задачі лінійного співвідношення /4/ має вигляд

$$F(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\left[\frac{\mu}{\mu_0} P'(x) + i Q'(x) \right]}{x-z} dx + F_0(z). \quad /6/$$

Підставляючи /6/ у /5/, запишемо два сингулярних інтегро-
диференціальних рівняння для визначення невідомих функцій $Q(x)$ і
 $P(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_0} Q(x) - \frac{h}{\kappa} \int_{-a}^a \frac{Q'(t) dt}{t-x} &= 2(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \varepsilon) \operatorname{Re} F_0(x), x \in L \\ P(x) - \frac{h\mu}{\kappa\mu_0} \int_{-a}^a \frac{P'(t) dt}{t-x} &= 2(\varepsilon - 1) \operatorname{Im} F_0(x), x \in L. \end{aligned} \quad /7/$$

Розв'язок /7/ шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} Q(ax) \\ P(ax) \end{pmatrix} = -\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \end{pmatrix} U_{m-1}(x), \quad |x| \leq 1, \quad /8/$$

де $U_m(x)$ - поліноми Чебишова другого роду; X_m, Y_m - невідомі
коефіцієнти, для визначення яких після відповідних перетворень отрим-
аємо дві квазірегулярні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa h}{2a} X_n + \frac{\mu}{\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} R(m,n) X_m &= 2 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \varepsilon - 1 \right) \operatorname{Re} I_n, \\ \frac{\kappa h \mu}{2a \mu_0} Y_n + \sum_{m=1}^{\infty} R(m,n) Y_m &= 2(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} I_n, \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad /9/$$

де

$$I_n = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) F_0(ax) dx,$$

$$R(m,n) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (m+n) \text{ - нечетне} & /10/ \\ \frac{1}{m(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{m(m-n+1)(m-n-1)}, \text{ якщо } (m+n) \text{ - парне} & \text{наїва} \end{cases}$$

Підставляючи /8/ у /6/, знаходимо вираз для функції $F(z)$

$$F(z) = \frac{h}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m - i \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[U_{m-1} \left(\frac{z}{a} \right) - \frac{a T_m \left(\frac{z}{a} \right)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] + F_0(z) \quad /11/$$

Із постановки задачі про напружено-деформований стан такої композиції випливає, що досить розглянути розподіл напружень і переміщень в одному поперечному перерізі $/XOY/$. Розподіл напружень і переміщень в околі кінців вклучення можна записати у вигляді /рис. 1/:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left(K_1 \cos \frac{\theta}{2} - K_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{z}),$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left(K_1 \sin \frac{\theta}{2} + K_2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{z}), \quad /12/$$

$$w = \frac{\sqrt{2z}}{\mu} \left(K_1 \cos \frac{\theta}{2} + K_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(z^{3/2}),$$

де K_1, K_2 - коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються формулами

$$K_1 - i K_2 = -\frac{h}{2\sqrt{a}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} \left(X_m - i \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \quad /13/$$

$j=1$ для кінця $-a$ і $j=2$ для кінця a /.

Зробивши у формулах /7/ або /9/ граничний перехід відповідно при $\mu \rightarrow \infty, \mu_0 \rightarrow 0, \mu_0 \rightarrow \mu$, враховувачи /6/ і /II/, маємо розв'язок наступних задач: для абсолютно короткого вклучення, податливого вклучення /розрізу/ і для тіла без вклучення; а із формул /13/ - відповідно розподіл напружень і переміщень для короткого вклучення і тріщини [1, 3].

Проведено числовий аналіз задачі для навантажень таких видів:
 а/ на нескінченності прикладені напруження τ_{xz}^{∞} і τ_{yz}^{∞} ; зосе-
 реджені сили відсутні; б/ напруження на нескінченності відсутні, а
 в точках $z = \pm i c$, відповідно прикладені зосереджені сили
 $\pm i P$. Системи рівнянь /9/ розв'язували методом редукції. Обчис-
 лення проводили при $a/h = 10$. На рис. 2 показана залежність кое-

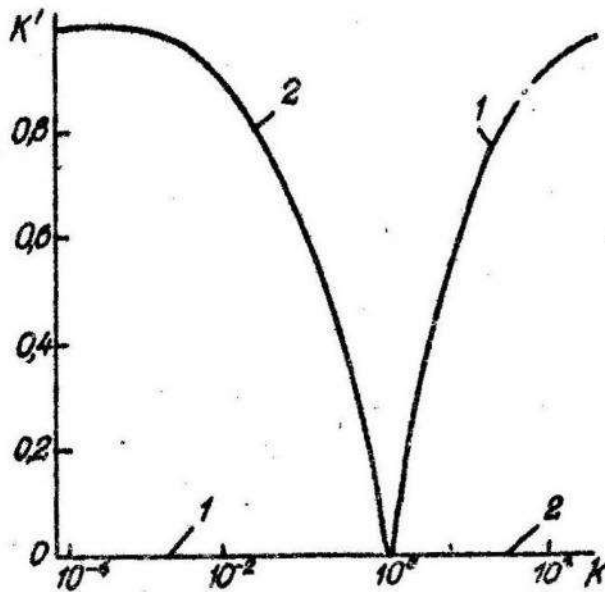


Рис. 2.

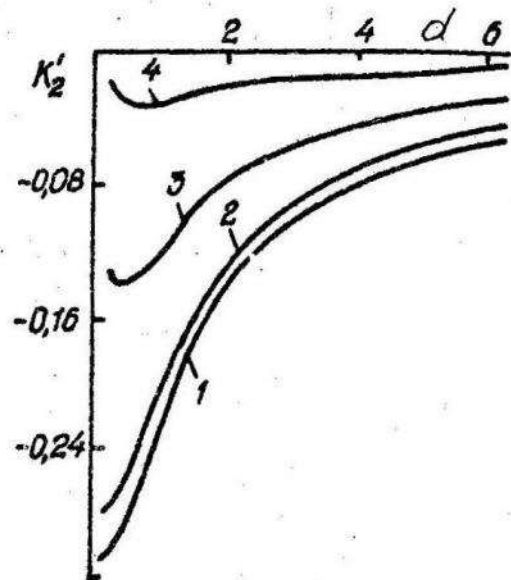


Рис. 3.

фіцієнтів інтенсивності напружень від відносної жорсткості включення

$K = \mu_0/\mu$ для випадку а/. Крива 1 характеризує $K'_1 = K_1/(\sqrt{a} \tau_{xz}^{\infty})$,
 крива - 2 - $K'_2 = K_2/(\sqrt{a} \tau_{yz}^{\infty})$. Залежність $K'_2 = K_2 \sqrt{a}/P$
 від відносної відстані між включеннями і точкою прикладання сили

$d = c/a$ для випадку б/ показана на рис. 3. Криві 1-4 характери-
 зуються послідовно такими значеннями параметра K : 10^{-3} ; 10^{-2} ; 10^{-1} ;
 0,5. Числовий розв'язок, отриманий для $K = 10^{-3}$ з точністю до 3%,
 збігається з аналітичним розв'язком для тріщини /розрізу/.

Список літератури: І. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., Л е н ь М.П.
 Антиплоская деформация тела с жесткими включениями. - Проблемы проч-
 ности, 1975, № 8. 2. М а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К.
 Напряженное состояние полосои /балки/ с премолинейным тонкостенным
 включением. - ЦММ, 1979, т.43, № 2. 3. П а н а с е н в.В., С а в -
 р у к М.Д., Д а д и ш и н А.П. Распределение напряжений около тре-
 щин в пластине и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редакцію 15.02.1980 р.