

В.О.Лихачов, Н.П.Флейшман

ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Розв'язок, який пропонується, є узагальненням нашої попередньої праці^[1] на випадок анізотропних пружних тіл. Він ілюструється на задачах про рівновагу трансверсально-ізотропного та ортотропного пружних шарів ($0 \leq x_3 \leq h$, $-\infty \leq x_1, x_2 < \infty$).

Для трансверсально-ізотропного тіла компоненти переміщень і напружень виражають у вигляді

$$\sigma_{\alpha\alpha} = C_{12}\theta + (C_{11} - C_{44}) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = C_{44} \frac{\partial^2 (\varphi_\alpha + \varphi_\beta)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad /1/$$

де функції $\varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ визначаються зі системи рівнянь

$$C_{44} \nabla^2 \varphi_\alpha + (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha^2} = -(C_{44} + C_{11})\theta, \quad /2/$$

$$\text{де } \theta = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2},$$

C_{11}, C_{12}, C_{44} — пружні сталі матеріалу; індекси $\alpha \neq \beta$ набувають значення 1, 2, 3.

Якщо ввести інтегральне перетворення Фур'є відносно змінних x_1, x_2 , то система /2/ у просторі зображень зводиться до

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_\alpha}{\partial x_3^2} - \alpha_\alpha^2 \bar{\varphi}_\alpha = \beta_\alpha \bar{\theta}, \quad /3/$$

Лихачов В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости. — Динамика и прочность машин, 1974, вып. 19.

... $\bar{\varphi}_2 = \delta_1' \varphi_1 - S_2' \bar{\varphi}_2 + \frac{\alpha_2^2 \bar{\varphi}_2}{\alpha x_2^2}$. Коефіцієнти α_2, β_2 залежать від ексцентриситетів δ_1, S_2 змінних x_1, x_2 і пружних сталей матеріалу.

Припускаючи тимчасово, що права частина рівняння /3/ відома, шляхом інтегрування визначаємо x_3

$$\bar{\varphi}_2 = A_2 \operatorname{ch} \alpha_2 x_3 + B_2 \operatorname{sh} \alpha_2 x_3 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \int_0^{x_3} \bar{\theta}(S_1, S_2, \xi) \operatorname{ch} \alpha_2 (x_3 - \xi) d\xi, \quad /4/$$

де A_2, B_2 - сталі інтегрування.

Якщо підставити вираз /4/ у /3/, то дістанемо інтегральне рівняння відносно функції $\bar{\theta}(S_1, S_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = \sum_{i=1}^3 S_i^2 (A_i \operatorname{ch} \alpha_i x_3 + B_i \operatorname{sh} \alpha_i x_3) - \\ - \int_0^{x_3} \bar{\theta}(S_1, S_2, \xi) \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i (x_3 - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad /5/$$

Шляхом послідовного диференціювання по x_3 та після виключення відповідних інтегралів рівняння /5/ зводимо до звичайного диференціального рівняння

$$\bar{\theta}^{(4)} - g_1 S_2 \bar{\theta}'' + g_2 S_2^2 \bar{\theta}'' - g_3 S_2^3 \bar{\theta} = 0 \quad /6/$$

з певними крайовими умовами на $\bar{\theta}^{(k)}$ ($k = 0, 5$) при $x_3 = 0$.

Відомі коефіцієнти g_2 залежать від пружних сталей системи /2/.

Після визначення $\bar{\theta}$ з рівняння /6/ функції φ_2 знаходимо з формул /4/.

Застосовуючи перетворення Фур'є також до відповідних крайових умов задачі при $x_3 = 0$ та $x_3 = h$, одержуємо рівняння, які слугують для визначення A_2, B_2 . Знаючи зображення $\bar{\varphi}_2$ відомим способом знаходимо експліцити, а потім компоненти напружень і переміщень /1/.

У випадку ортотропного шару задача розв'язується аналогічно. Для визначення функцій φ_α у просторі зображень замість /3/ отримаємо систему

$$\frac{d^2 \varphi_\alpha}{dx_\beta^2} - \alpha_\alpha \varphi_\alpha = C_\alpha \bar{\theta}_\alpha, \quad /7/$$

де α_α , C_α залежать від дев'яти пружних сталих матеріалу,

$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$ - від $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\varphi}_3$; а $\bar{\theta}_3$ - тільки від $\bar{\varphi}_1$ та $\bar{\varphi}_3$.

Розв'язок системи /7/ також зводиться до крайової задачі типу /6/ відносно $\bar{\theta}_1$, після визначення якої знаходимо всі шукані функції $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\theta}_3$, та, нарешті, $\bar{\varphi}_3$.

Без принципових ускладнень запропонований розв'язок узагальнюється на випадок довільної анізотропії.

Стаття надійшла в редакцію 10.03.1980 р.

УДК 539.3+4+4.:621.81

М.В.Сулим, Г.Т.Сулим

ПРО МІЦНІСТЬ ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ ТРУБОПРОВОДІВ

Згідно з механікою крихкого руйнування міцність механічної конструкції з тріщиноподібними дефектами визначається коефіцієнтами інтенсивності напружень K_{IH} [1].

Розглянемо метод оцінки K_{IH} біля поздовньої тріщини всередині зварного шва тонкої циліндричної оболонки, яка завантажена внутрішнім тиском p , розтягується зусиллям P і скручується моментом M . Радіус кривини середньої поверхні оболонки R , товщина стінки $R^0 \ll R$, ширина зварного шва $2H$. Вдоль середньої лінії шва, що утворює кут γ з твірною оболонки, локалізовано тріщиноподібні дефекти, довжина яких мала порівняно з R . Найчастіше ц. дефекти не мають наскрізної природи, проте, розглядаючи гірший для міцності трубопроводу випадок, вважатимемо їх наскрізними.