

$$K_{2,1}^{(n)} - iK_{2,1}^{(n)} = K^0(K_1^{(n)} - iK_2^{(n)}), \quad K^0 = \max(1, E_1/E_2). \quad /7/$$

Можна припустити, що результати /5/ - /7/ більш точно опишуть граничне значення КІН біля тріщини у зварному шві, якщо під K_1 , K_2 розуміти значення КІН біля тріщини у циліндричній трубі [2].

Отримані результати безпосередньо застосовуються для оцінки міцності шаруватих композитів.

Список літератури: 1. Васильченко Г.С., Кошелев П.Ф. Практическое применение механики разрушения для оценки прочности конструкций. - М.: Наука, 1974. 2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976. 3. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с трещинами. - ФХМ, 1975, т. II, № 5. 4. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами. - ФХМ, 1976, т. I2, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 10.03.1980 р.

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб, Г.Т.Сулим

ВЛИВ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ВІД ДИПОЛЯ ТЕПЛА

Розглядаємо плоску стаціонарну задачу теплопровідності без врахування тепловіддачі через бічні поверхні для складеного тіла з тонкостінними прошарками-включеннями на межі розділу компонентів. На осі абсцис $L = L' \cup L''$ декартової системи координат XOY розташована система N симетричних включень малої товщини $2h(x)$, так що $L' = \bigcup_{n=1}^N L_n$, де $L_n = [a_n^-, a_n^+]$ і на торцях включень $k(a_n^\pm) = 0$. Вадомо верхньої L'_2 та нижньої L'_1 границь включень здійснюється

ідеальний тепловий контакт з півплощинами S_2, S_1 , що мають різні теплофізичні властивості та на L' контактують безпосередньо. Задані теплові диполі /дублети [1] / інтенсивності $q_{0\kappa}$ з орієнтацією α_κ у точках $Z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa$ областей S_κ ($\kappa=1,2$) та інтенсивності q_{00} з орієнтацією α_0 у точці $Z_0 = x_0$ на осі деякого включення. Коефіцієнти теплопровідності включень, нижньої та верхньої півплощин дорівнюють відповідно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Необхідно визначити розподіл температури в матриці.

Аналогічна задача при дії потоку тепла та джерел тепла розглянута у працях [4, 5].

Шукане температурне поле $t(z)$ зобразимо [4, 5] у вигляді суперпозиції $t(z) = t_1(z) + t_2(z)$ основного температурного поля $t_1(z)$, яке відповідає задачі для контактуючих півплощин при відсутності включень

$$t_1(z) = -m_\kappa \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{z - z_\kappa} \right] - (n_\kappa - n_l) m_\kappa \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{z - \bar{z}_\kappa} \right] - 2n_l m_l \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_l}}{z - z_l} \right] + t_1^0 \quad /1/$$

$$(z \in S_\kappa; \kappa, l = 1, 2; \kappa \neq l),$$

де $m_j = \frac{q_{0j}}{2\pi\lambda_j}$; $n_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2}$, t_1^0 - постійна, та збуреного температурного поля $t_2(z)$, викликаного наявністю включень. Для визначення скачка $\gamma_2(x)$ поля $t_2(z)$ на включеннях одержане сингулярне інтегродиференціальне рівняння типу Прандтля

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\gamma_2(t)}{t - x} dt - \alpha(x) \gamma_2(x) = F(x), \quad \gamma_2(a_n^\pm) = 0 \quad /2/$$

$$(x \in L', n = \overline{1, N}),$$

де

$$F(x) = (1 - \alpha)g(x) - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1} S(x); \quad \alpha(x) = \frac{x}{h(x)}, \quad x = \frac{\lambda_0}{2n_1\lambda_1};$$

$$g(x) = 2 \sum_{\kappa=1}^2 m_\kappa \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{(x - z_\kappa)^2} \right]; \quad \varphi(x) = \frac{4\lambda_0 m_0 h(x)(x - x_0) \cos \alpha_0}{[(x - x_0)^2 + h'(x)]^2}.$$

Якщо скачок $\gamma_2(x)$ відомий, то поле $t_2(z)$ визначається формулами /10/ [5] чи /3/ [4]. З рівняння /2/ випливають аналітичні зв'язки у часткових випадках теплоізованих / $\lambda_0 = 0$ / і теплопровідних / $\lambda_0 = \infty$ / включень [4, 5].

Для прикладу розглядаємо одне вклучення, розташоване вздовж відрізка $L' = [-a, a]$, коли $h(x) = h_0 [1 - (\frac{x}{a})^2]^{1/2q}$, ($q \geq 1$). Скористаємося розкладом [4, 5]

$$T_2'(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{p=1}^{\infty} A_p T_p(\frac{x}{a}), T_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{p} U_{p-1}(\frac{x}{a}), \quad /3/$$

коефіцієнти якого визначають із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\pi}{2} A_{k+1} + \alpha_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_p H_{pk}^q = F_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad /4/$$

де

$$H_{pk}^q = \frac{\pi \Gamma(2\nu)}{p 4^\nu} \sum_{l=1}^q \frac{(-1)^{l+1} \sin(p_l \pi)}{\Gamma(1+\nu+p_l) \Gamma(\nu-p_l)}; \quad F_k = \int_{-1}^1 F(at) \sqrt{1-t^2} U_{k-1}(t) dt;$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi a}{h_0}; \quad \nu = 1 - \frac{1}{2q}; \quad 2p_l = k - (-1)^l p \quad (l = 1, 2) \dots$$

Введемо коефіцієнт інтенсивності потоку тепла /КІПТ/ - аналог коефіцієнта інтенсивності напружень у задачах антиплоскої деформації [2]. Якщо для розглянуваного вклучення застосувати "принцип мікроскопа" [6], тобто ввести полярну систему координат (z, θ) у кінцях вклучення $z(z \pm a) = z e^{i\theta}$ і скористатись асимптотичним виразом /22.5/ [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{T_2'(t)}{t-z} dt = \mp T_2'(x) \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{x=za} / \sqrt{2a z e^{i\theta}} + O(1), \quad /5/$$

то з закону Фур'є можна одержати в околі кінців вклучення наступну асимптотичну поведінку складових q_s теплового потоку в напрямі і температури:

$$\{q_x, q_y, q_z\} = \frac{\kappa q}{\sqrt{2z}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right\} + O(1),$$

$$t = \frac{\sqrt{2z}}{\lambda \kappa} \kappa q \sin \frac{\theta}{2} + O(z^{1/2}), \quad /6/$$

де $\kappa q = \pm W^\pm / \sqrt{2}$, $W^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \sqrt{1 \pm a - x} \lambda \kappa T_2'(x)$ ($\kappa = 1, 2$).

Зазначимо, що верхні знаки позначають КІПТ в околі правого кінця виключення, а нижні – лівого. Значення індекса κ відповідає півплощині, в якій визначається КІПТ.

Використовуючи /3/, маємо

$$\kappa q = \pm \frac{\sqrt{a}}{2} \lambda_{\kappa} \sum_{p=1}^{\infty} (\pm 1)^p A_p \quad (\kappa = 1, 2). \quad /7/$$

Числовий розв'язок системи рівнянь /4/ проведено на ЕОМ ЕС-1022 для однорідної площини $\lambda_1 = \lambda_2$ / при різних значеннях параметрів $q, \lambda = \lambda_0/\lambda_1, z_{\kappa} = x_{\kappa} + iy_{\kappa}$ ($\kappa = 1, 2$) . Для дослідження ІХ-ної точності при $|x| \leq 0,95a$ у найнесприятливішому випадку прямокутного / $q = \infty$ / абсолютно теплопровідного / $\lambda = \infty$ / виключення при $|y_{\kappa}| \geq 0,5a$ доцільно обмежитися першими 100 відмінними від нуля коефіцієнтами розкладу /3/. Відзначимо, що скачок $\delta_2(x)$ та КІПТ не зміняться, якщо диполь орієнтації α_{κ} у точці z_{κ} замінити на диполь орієнтації $\alpha_{\kappa} + \pi$ у точці $\bar{z}_{\kappa}$.

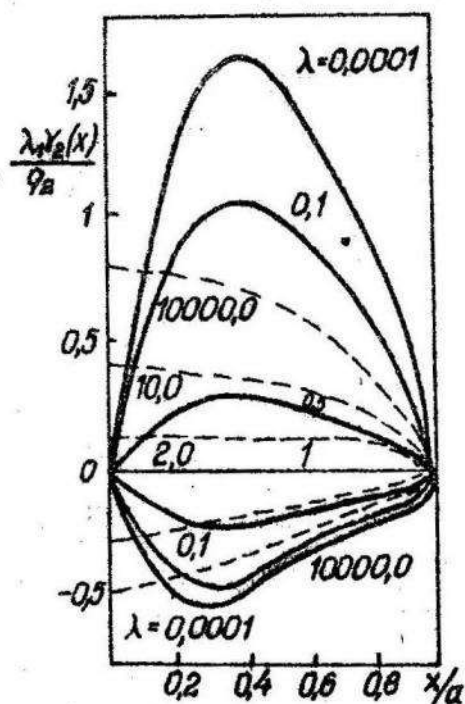


Рис. 1.

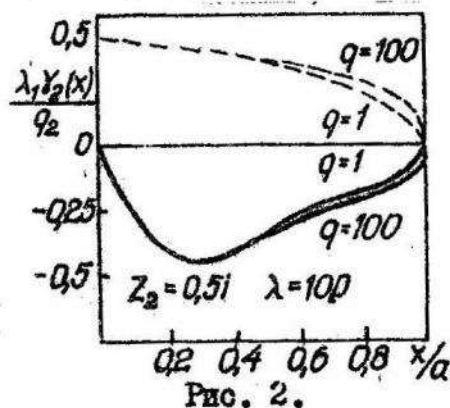


Рис. 2.

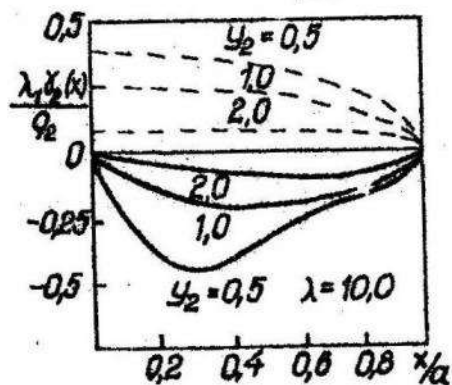


Рис. 3.

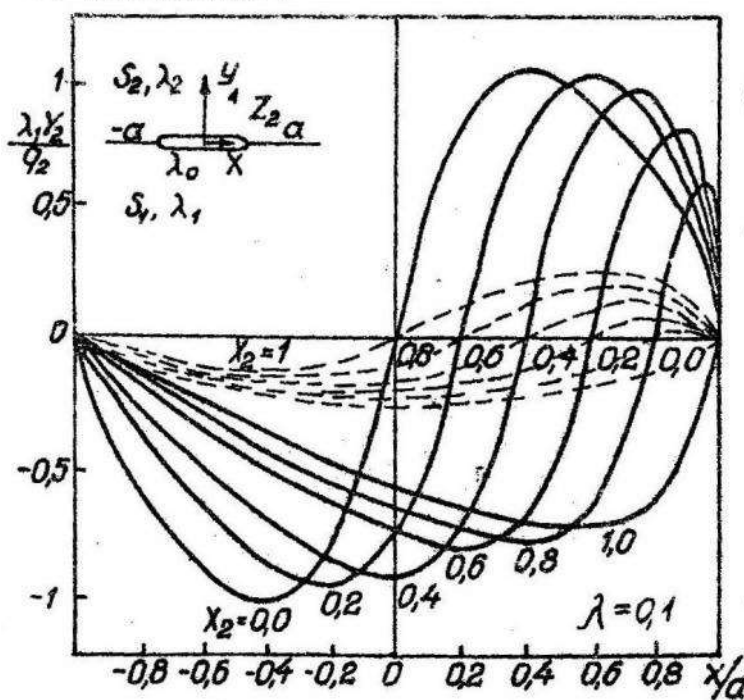


Рис. 4.

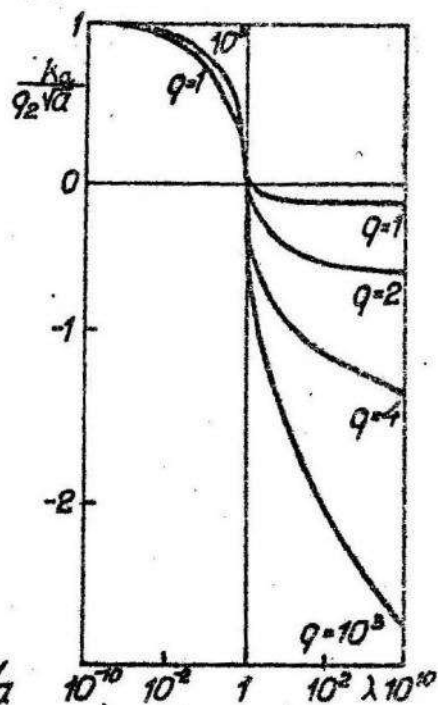


Рис. 5.

На рис. 1 зображена зміна скачка $\gamma_2(x)$ залежно від зміни параметра λ при $q=2$ і $z_k=i$. Рис. 2 ілюструє вплив форми включення на $\gamma_2(x)$. Залежність $\gamma_2(x)$ від ординати розміщення диполя y_k показана на рис. 3, а від абсциси x_k – на рис. 4. Суцільними лініями на рисунках зображені результати отримані для диполя орієнтації $\alpha_k=0$ / $\gamma_2^0(x)$ /, пунктирними – для орієнтації $\alpha_k=\frac{\pi}{2}$ / $\gamma_2^{\pi/2}(x)$ /, де $\gamma_2^{\alpha}(x)$ – більш деталізоване означення скачка температури для диполя орієнтації α . Зрозуміло, що при довільній орієнтації

$$\gamma_2^{\alpha}(x) = \gamma_2^0(x) \cos \alpha + \gamma_2^{\pi/2}(x) \sin \alpha. \quad /3/$$

При віддаленні диполя від початку координат його вплив на скачок температури на включенні зменшується набагато сильніше, ніж у випадку джерела [4]. На рис. 5 зображено залежність КПП від параметрів λ і q .

Список літератури: 1. Каролоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. 2. Кит Г.С. Про аналогії між позовжним зсувом і стаціонарною теплопровідністю тіл з вклученнями та тріщинами. - ДАН УРСР, сер. А, 1977, № 4. 3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. 4. Пісозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив лінійного вклучення на температурне поле від джерела тепла. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 16. 5. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого линейного вклучения на температурное поле в кусочно-однородной пластине. - ИЖ, 1979, 37, № 6. 6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974.

Стаття надійшла в редколегію 11.03.1980 р.

УДК 622.831

Т.Л.Мартинович, М.І.Задворняк

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНОМУ МАСИВІ З ВИРОБКОЮ

За допомогою методів лінійної теорії пружності розглядаємо другу основну задачу для вагомого анізотропного масиву з горизонтальною циліндричною виробкою, проведеною на глибині H від донної поверхні L_0 . Нормальний переріз виробки обмежений простим замкнутим контуром L , який описується рівнянням

$$x + iy = R(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta}), \quad \sum_{k=1}^N k |C_k|^2 < 1.$$

Віднесемо гірський масив до декартової системи координат x, y, z /рис. 1/. У кожній точці анізотропного масиву є площина пружної симетрії паралельна координатній площині xy , яка суміщена з нормальним перерізом горизонтальної виробки.

Напруження у нерозробленому масиві обчислюють за формулами

$$\sigma_x^0 = \lambda \gamma(y-H), \quad \sigma_y^0 = \gamma(y-H), \quad \tau_{xy}^0 = 0, \quad /1/$$