

На рис. 2, 3 показано розподіл напружень σ_θ на поверхні квадратної виробки / $N=3$; $c_1=0$; $c_2=0$; $c_3=\pm 1/9$ / у випадку абсолютно жорсткого ядра. Суцільною лінією зображені напруження у частках δH , пунктиром – у частках δR .

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1980 р.

УДК 624.07:534.1

Б.І.Гайвась, В.М.Фарат

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ СТИСНУТОГО КОНСОЛЬНОГО КОНІЧНОГО СТЕРЖНЯ З МАСОЮ

Розглядаємо пружний консольний стержень жорсткості $EJ(x)$ і маси $m(x)$ при дії слідувчої сили H та консервативної G на вільному кінці. Зосереджена маса M , розміщена у точці x , /рис. 1/. Дослідження малих коливань стержня зводиться до такої кра-

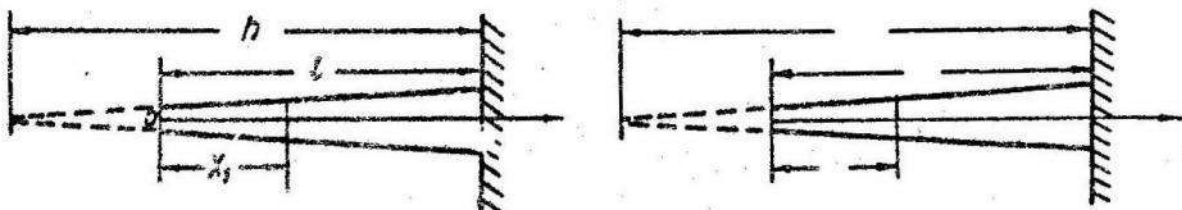


Рис. 1.

йової задачі:

$$[f(x)y'']'' + \rho y'' - \omega^2 g(x)y = \sum_{q=1}^n \omega^2 \gamma_q y^{(q-1)}(x_1) \delta_q(x-x_1), \quad /1/$$

$$[f(x)y'']' + \rho(1-\delta)y' = 0, \quad f(x)y'' = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad /2/$$

$$y = y' = 0 \quad \text{при} \quad x=1,$$

$$\text{де} \quad \omega^2 = \frac{m_0 \Omega^2 l^4}{E J_0} \quad ; \quad \rho = \frac{H l^2}{E J_0} \quad ; \quad \Omega \quad - \text{частота};$$

$$\gamma_q = \frac{m_1}{m_0 l^4}; \quad \gamma_{q1} = \frac{J_1}{m_0 l^4}; \quad H = G + H; \quad m_0 = m(1); \quad J_0 = J(1).$$

I_p - момент інерції зосередженої маси; γ - параметр неконсервативності; $\sigma_q(x)$ - q -та похідна функції Хевісайда $\sigma_0(x)$

$$f(x) = [(1-\alpha) + \alpha x]^4, \quad g(x) = [(1-\alpha) + \alpha x]^2, \quad \alpha = \frac{1}{h}.$$

Розв'язок рівняння /1/ шукаємо у вигляді ряду [1]

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \omega^{2n}. \quad /3/$$

На невідомі функції $y_n(x)$ ($n = 0, 1, 2 \dots$) накладаємо такі умови:

$$[f(x)y_0'']'' + \rho y_0'' = 0, \quad /4/$$

$$f(x)y_0'' + \rho(1-\gamma)y_0' = 0, [f(x)y_0'']' = 0 \text{ при } x=0, \quad /5/$$

$$[f(x)y_n'']'' + \rho y_n'' = g(x)y_{n-1} + \sum_{q=1}^2 \gamma_q y_{n-1}^{(q-1)}(x) \sigma_q(x-x_1), \quad /6/$$

$$f(x)y_n'' = [f(x)y_n'']' = y_n' = y_n = 0 \text{ при } x=0. \quad /7/$$

При цьому $y(x)$ задовольняє рівняння /1/ і умови на вільному кінці.

Розв'язок задачі /4/ - /5/ має вигляд

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^1 C_k \Phi_{k0}(x), \quad /8/$$

$$\text{де } \Phi_{00}(x) = \delta x + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha x)}{\gamma\rho} \sin \frac{\sqrt{\rho} x}{(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha x)}, \quad /9/$$

$$\Phi_{10}(x) = 1.$$

Розв'язки y_n задачі /6/ - /7/ визначаються через попередні y_{n-1} за допомогою співвідношення

$$y_n = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_0^x \psi(x, \tau) g(\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau + \sum_{q=1}^2 \gamma_q y_{n-1}^{(q-1)}(x, x-1) \int_0^{x-x_1} [\psi_{\tau}^{(q-1)}(x, \tau)]_{\tau=x_1} \sigma_0(x-x_1) d\tau \right\}, \quad /10/$$

де $\psi(x, \tau)$ - функція впливу [3] однорідного диференціального

рівняння /6/, причому

$$\psi(x, \tau) = (x - \tau) - \frac{(1 - \alpha + \alpha x)(1 - \alpha + \alpha \tau)}{\gamma \rho} \sin \frac{\gamma \rho (x - \tau)}{(1 - \alpha + \alpha x)(1 - \alpha + \alpha \tau)} \quad /11/$$

Тоді з врахуванням умов /7/ і співвідношення /8/ маємо

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^1 C_k \varphi_{kn}(x) \quad /12/$$

У розв'язок /10/ входять значення $y_n^{(q-1)}(x_1)$, які запишемо у вигляді

$$y_n^{(q)}(x_1) = \sum_{k=0}^1 C_k A_{2k}^n \quad /13/$$

де $A_{2k}^n = y_n^{(q)}(x_1) / C_k = \delta_{jk}$, δ_{jk} - символ Кронекера. Легко показати [4], що розв'язки $y^{(z)}(x)$ ($z=0,1$) неперервні при $x=x_1$. Тому

$$A_{2k}^n = \frac{1}{\rho} \int_0^{x_1} \psi_x^{(q)}(x, \tau) g(\tau) \varphi_{kn-1}(\tau) d\tau, \quad /14/$$

$$\varphi_{kn}^{(q)}(x) = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_0^x \psi_x^{(q)}(x, \tau) g(\tau) \varphi_{kn-1}(\tau) d\tau + \right.$$

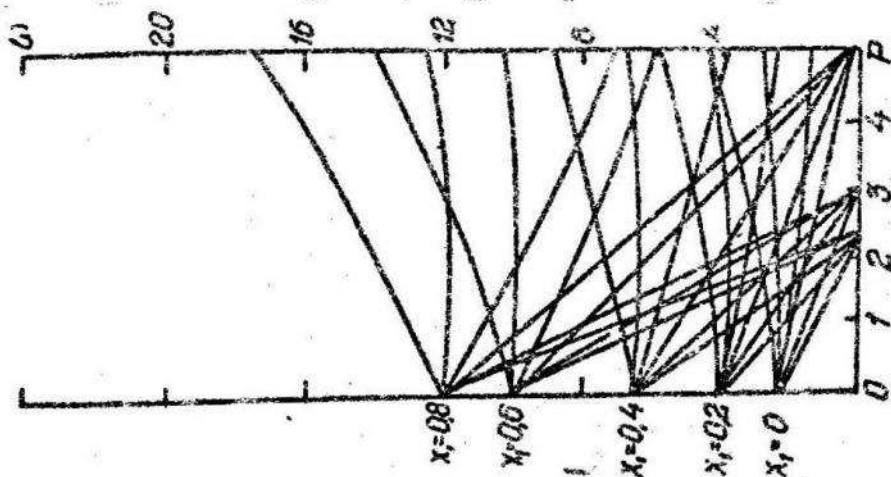
$$\left. + \sum_{q=1}^2 \eta_q A_{q-1k}^{n-1} (-1)^{q-1} [\psi_{\tau}^{(q-1)}(x, \tau)]_{x/\tau=x_1}^{(q)} \varphi_0(x-x_1) \right\}. \quad /15/$$

Маючи вирази для $\varphi_{kn}^{(q)}(1)$, легко отримати характеристичне рівняння у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \omega^{2m} = 0, \quad /16/$$

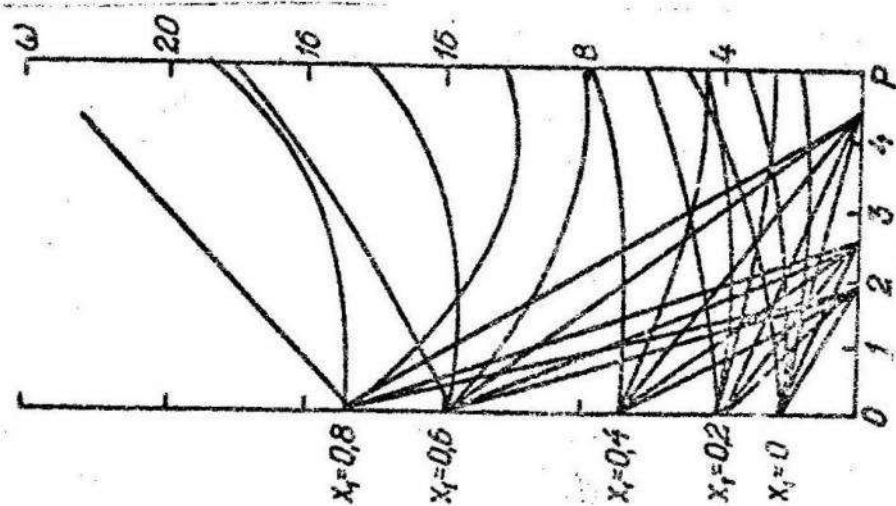
$$\text{де } A_m = \sum_{k=0}^m [\varphi_{0m-k}^{(1)}(1) \varphi_{1k}^{(1)}(1) - \rho \varphi_{0m-k}^{(1)}(1) \varphi_{1k}^{(1)}(1)]. \quad /17/$$

Якщо є коефіцієнти характеристичного ряду, можна обчислити методом двосторонніх оцінок частоту коливань конічного стержня та критичні параметри навантаження.



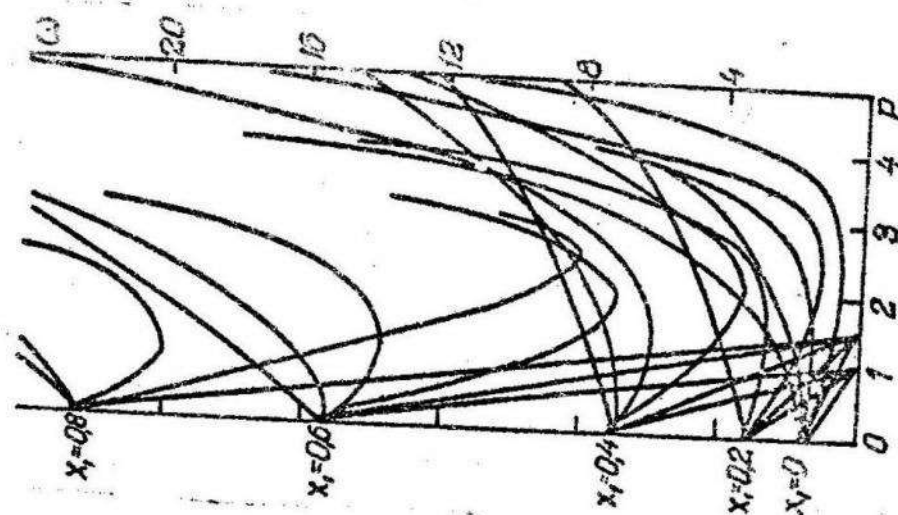
$\alpha = 0.1$

Рис. 2.



$\alpha = 0.2$

Рис. 3.



$\alpha = 0.5$

Рис. 4.

На рис. 2-4 дано залежності частот ω від параметрів конусності μ , неконсервативності γ і точки X , прикладення зосередженої маси. Кожен пучок кривих залежності частот від параметрів відповідає одному значенню X , точки прикладення зосередженої маси в множини $\{0(0,2) 0,8\}$. Пучки від нижнього до верхнього побудовані у порядку зростання цих значень. Криві в кожному пучку від нижньої до верхньої побудовані для значень параметрів неконсервативності γ від 0 до 1 з кроком 0,2 відповідно при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$.

Список літератури: 1. Б а й д а к Д.А., З о р і й Л.М. Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок. - ДАН УРСР, сер. А., 1972, № 6. 2. З о р і й Л.М. К розвитку аналітичних методів дослідження задач динаміки упругих і гідроупругих систем. - Математические методы и физико-механические проблемы, 1978, № 7. 3. З о р і й Л.М. Про новий метод побудови загальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. - ДАН УРСР, сер. А, 1979, № 5. 4. О б р а з ц о в И.Ф., О н а н о в Г.Г. Строительная механика скрученных тонкостенных систем. - М.: Машиностроение, 1973.

Стаття надійшла в редакцію 08.01.1980 р.