

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

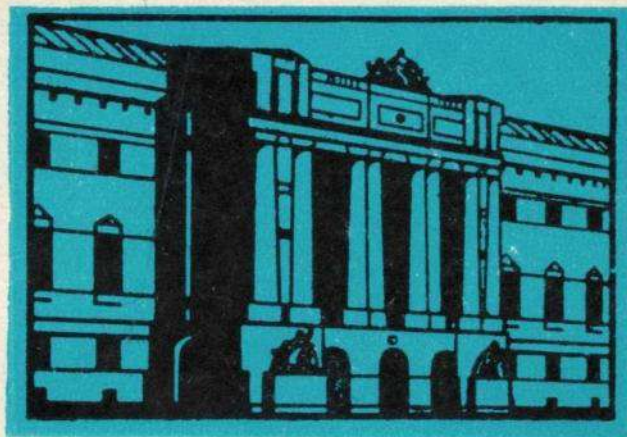
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

17

1981



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 17

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ

Виходить з 1935 р.

Львів

ВІДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ

ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ "ВІЩА ШКОЛА"

1981

UDK 22,162

UDK 7.2

UDK 89

UDK 518

Вестн. Львов. ун-та, вып. 17, Численные методы анализа. Львов:
Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 104 /на укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения функциональных уравнений и задач оптимизации и работы по решению статических и динамических задач для сплошных сред.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Р е п а к ц і й н а к о л е г і я : проф., д-р техн. наук
Д.В.Гриліцький /відп. ред./; доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Щерби-
на /відп. секретар/; доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Бартіш; доц.,
канд. фіз.-мат. наук А.І.Кардам; проф., д-р техн. наук Н.П.Флейшман.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

20204-018
M225/04/-81

I702050000

Замовне

© Львівський державний
університет, 1981

П.С.Сеньо

СТІЙКІСТЬ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Кожен обчислювальний процес, який реалізують на дискретному обчислювальному пристрої, поряд з похибкою методу дає неусуну похибку, що виникає внаслідок похибок вихідних даних і вимірювань, та похибку заокруглень, яку одержуємо тому, що обчислювальні пристрої містять скінченну кількість розрядів. Ці похибки можна розглядати як певні збурення вихідного ідеального обчислювального процесу. Якщо незалежно від цих збурень при реалізації обчислювального процесу отримуємо правильний результат, то такий процес називаємо стійким.

Для розв'язування нелінійних операторних рівнянь [4]

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де P – нелінійний оператор, що діє з одного банахового простору в інший, запропоновано обчислювальний алгоритм

$$\begin{cases} z_n = x_n - \Gamma_n P(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \{2J - [P(z_n, x_n)]' P'(x_n)\}^{-1} \Gamma_n P(x_n). \end{cases} \quad /2/$$

Тут $\Gamma_n = \Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$, $P(z, x)$ – перша поділена різниця [6] оператора $P(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Нехай на процес /2/ діють збурення, які є послідовностями лінійних операторів $\{V_n\}$ і $\{\tilde{V}_n\}$, так, що

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \tilde{\Gamma}_n P(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n - \{2J - [P(z_n, x_n)]' P'(x_n) + V_n\}^{-1} \tilde{\Gamma}_n P(x_n), \end{aligned} \quad /3/$$

де $\tilde{\Gamma}_n = [P'(x_n) + \tilde{V}_n]^{-1}$, $n = 0, 1, \dots$

Достатні умови існування розв'язку рівняння /1/ й умови збіжності процесу /3/ дає така теорема.

Т е о р е м а I. Нехай виконуються умови:

I/ для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \leq \Gamma_0$, $\|P'(x_0)\| \leq \kappa_0$;

$$2/. \quad \|f_0 P(x_0)\| \leq \tilde{L}_0;$$

$$3/ \text{ в області } \Omega_0 = \{x: \|x - x_0\| \leq \rho_0\} \quad , \text{ де } \rho_0 = \frac{\tilde{L}_0}{(1-q_0)(1-x_0^3)(1-h_0^3 L_0^3)},$$

$$\|P'(x)\| \leq M, \|P''(x)\| \leq N \quad \text{і} \quad P''(x) \quad \text{задовольняє умову Ліпшиця}$$

$$\|P''(x'') - P''(x')\| \leq L \cdot \|x'' - x'\|;$$

$$4/ \quad \|\tilde{V}_n\| \leq \tilde{C} \cdot 2^n, \quad \|V_n\| \leq C \cdot 2^n;$$

$$5/ \quad h_0 = B_0 M \tilde{L}_0, \quad h_0 < (1-q_0)(1-x_0^3), \quad \text{де } q_0 = \frac{h_0}{2(1-x_0^3)-h_0} + C \cdot 2^5, \quad x_0^3 = \tilde{C} \cdot B_0 \cdot \tilde{L}_0^3;$$

$$6/ \quad q_0 < 1, \quad x_0^3 < 1;$$

$$7/ \quad S_0^3 = L_0^3 h_0^3 / [(1-q_0)(1-x_0^3)] < 1.$$

де

$$L_0^3 = \frac{1}{M^3 \cdot B_0 [(1-q_0)(1-x_0^3)-h_0]} \left\{ \frac{m_0 N}{6(1-x_0^3)^2(1-q_0)^2} (2+m_0 \tilde{L}_0) + \frac{NM \tilde{B}_0}{12(1-x_0^3)^3} + (1+m_0 \tilde{L}_0) \tilde{C} \tilde{L}_0 \right.$$

$$\left. + K_0 C + \frac{MC \tilde{L}_0}{2(1-q_0)(1-x_0^3)} + m_0 \left[\frac{M \tilde{B}_0}{4(1-q_0)(1-x_0^3)^2} + \frac{L \cdot \tilde{L}_0}{24(1-q_0)^3(1-x_0^3)^3} + \frac{M \cdot \tilde{B}_0 \cdot N \cdot \tilde{L}_0}{12(1-q_0)(1-x_0^3)^3} \right] \right\},$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{2(1-x_0^3)B_0}{2(1-x_0^3)-h_0}; \quad m_0 = \frac{\tilde{B}_0 M}{2(1-x_0^3)} + C \cdot 2^5.$$

Тоді рівняння /I/ в області Ω_0 має розв'язок, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за допомогою /3/, причому

$$\|x^* - x_n\| \leq [(1-q_0)(1-x_0^3)]^{n-1} S_0^{4^{n-1}} \cdot \frac{\tilde{L}_0}{1-h_0^3 L_0^3}. \quad /4/$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідних теорем з праць [2, 4, 5].

Поряд з рівнянням /I/ розглянемо збурене рівняння

$$P_\varepsilon(x) = 0. \quad /5/$$

Оператор P_ε вважаємо близьким до оператора P в тому сенсі, що в деякій області R $\|P_\varepsilon(x) - P(x)\| \leq \delta(\varepsilon, x)$, де функція

$\delta(\varepsilon, x) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0, x \in R$. Застосуємо процес /3/ до рівняння /5/. Тоді має місце така теорема.

Т е о р е м а 2. Нехай для оператора $P_\varepsilon(x)$ виконуються умови 2/-7/ теореми I. Крім того, припускаємо, що рівняння /I/ має хоча б один розв'язок $x^* \in \Omega \subset \Omega_0, \|P(\tilde{x}, x)\| \leq B, \forall x, \tilde{x} \in \Omega_0$.

Тоді при $n \rightarrow \infty$ і $\varepsilon \rightarrow 0$ процес /3/ збігається до одного з розв'язків рівняння /I/, який належить області Ω_0 , причому

$$\|x_i^{(n)} - x^*\| \leq [(1-q_0)(1-x_0^3)]^{n-1} S_0^{4^{n-1}} \cdot \frac{\tilde{L}_0}{1-h_0^3 L_0^3} + B \cdot \delta(\varepsilon, x^*). \quad /6/$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2 з праці [5].

Аналогічно, як у праці [1], за допомогою функції $\delta(\varepsilon, x)$ можна враховувати похибку заокруглень і неусувану похибку. Отже, процес /2/ стійкий у тому сенсі, що похибки заокруглень, якщо вони не дуже великі, не порушують його збіжності та не змінюють порядку збіжності.

Розглянемо обчислювальний процес

$$\begin{cases} z_n = x_n - [P(\tilde{x}_n, x_n)]^{-1} P(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \{2 \cdot J - [P(z_n, x_n)]^{-1} P(\tilde{x}_n, x_n)\}^{-1} [P(\tilde{x}_n, x_n)]^{-1} P(x_n) \end{cases} /7/$$

який є різницеvim аналогом процесу /2/.

Легко показати, що процес /7/ є процесом /3/, де збурення

$$\tilde{V}_n = \int_0^1 P''(x_n + \tau(\tilde{x}_n - x_n)(1-\tau)) d\tau (\tilde{x}_n - x_n), \quad /8/$$

$$V_n = -[P(z_n, x_n)]^{-1} \tilde{V}_n. \quad /9/$$

Отже, достатні умови існування розв'язку рівняння /1/ і умови збіжності процесу /7/ дає така теорема.

Т е о р е м а 3. Нехай виконуються умови 1/ - 3/ теореми 1 при $\rho_0 = \gamma_0 / [(1-q_0)(1-\alpha_0^2)(1-h_0^2 L_0^2)]$. Крім того, виконуються ще й такі умови:

1/ на кожному кроці $\tilde{x}_n$ вибираємо з умови $\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq 2C \|P(x_n)\|^{1/2}$;

2/ $h_0 = B_0 M \gamma_0$, $h_0 < (1-q_0)(1-\alpha_0^2)$, де $q_0 = \frac{h_0}{2(1-\alpha_0^2)-h_0} + B_0 M C \gamma_0^2$;

3/ $q_0 < 1$, $\alpha_0^2 = B_0 M C \gamma_0^2 < 1$;

4/ $S_0^2 = L_0^2 h_0^2 / [(1-q_0)(1-\alpha_0^2)] < 1$, де

$$L_0^2 = \frac{1}{M^2 B_0^2 [(1-q_0)(1-h_0)-h_0]} \left\{ m_0 \left[\frac{M^2 \cdot \tilde{B}_0}{4(1-q_0)(1-\alpha_0^2)^2} + \frac{L \cdot \gamma_0}{24(1-q_0)^2(1-\alpha_0^2)^3} + \frac{M \cdot \tilde{B}_0 M \cdot \gamma_0}{12(1-q_0)(1-\alpha_0^2)^3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{N m_0}{6(1-q_0)^2(1-\alpha_0^2)^2} (2 + \gamma_0 m_0) + \frac{N M \tilde{B}_0}{12(1-\alpha_0^2)^2} + K_0 M \tilde{B}_0 C + (1 + \gamma_0 m_0) C M \gamma_0 + \frac{M^2 \cdot C \cdot \tilde{B}_0 \cdot \gamma_0}{2(1-q_0)(1-\alpha_0^2)} \right\}.$$

Тоді /1/ має в області R розв'язок, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за /7/, причому

$$\|x^* - x_n\| \leq [(1-q_0)(1-\alpha_0^2)]^{n-1} S^{n-1} \cdot \frac{\gamma_0}{1-h_0^2 L_0^2}.$$

Доведення цієї теореми з перевіркою виконання умов теореми I при конкретних збуреннях /8/, /9/.

З а у в а ж е н н я 1. Умови теореми 3 значно спрощуються, якщо на кожному кроці ітерації $\tilde{x}_n$ вибираємо з умови

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \leq 2M^2 B_n^2 \cdot \gamma_n^2. \quad /10/$$

З а у в а ж е н н я 2. З теореми I випливає, що метод /2/ є збуреним аналогом однопараметричного сімейства методів типу Рунге [3] зі збуреннями, які не знижують порядку їх збіжності.

Справді, метод /2/, як і методи типу Рунге, містить лише похідні першого порядку, порядки збіжності цих методів дорівнюють чотирьом, оператор $P(x_0) \cdot P'(x_0) \{2J - [P(x_0)]'P'(x_0)\}(x - x_0)$ збігається з оператором $P(x)$ також з точністю $O(\|x - x_0\|^4)$.

Список літератури: 1. Б а б и ч М.Д., И в а н о в В.В. Оценка полной погрешности при решении нелинейных операторных уравнений методом простой итерации. - ЖВМФ, 1967, 5, № 5. 2. Б а р т и ш М.Я. Возмущенные аналоги методов типа Ньютона-Канторовича. - В кн.: Математический сборник, Киев: Наукова думка, 1976. 3. Б а р т и ш М.Я., С е н ь о П.С. О методе Рунге решения нелинейных операторных уравнений третьего и четвертого порядка сходимости. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28. 4. Б а р т и ш М.Я., С е н ь о П.С., Ш е р б и н а Ю.Н. Итерационно-разностный метод для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 29. 5. Б а р т и ш М.Я., Ш е р б и н а Ю.Н. Исследование условий сходимости и оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28. 6. У л ь м С.Ю. Об обобщенных разностях. I. - Изв. АН Эст.ССР. Физика, Математика, 1967, 16, № 1.

Стаття надійшла в редакцію 10.09.1979 р.

П.С.Сенько, С.М.Шахно

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ
ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ ТИПУ РУНГЕ

Системи різницевих рівнянь газової динаміки у загальному випадку є системами нелінійних алгебраїчних рівнянь великих розмірів. При виборі ітераційного методу розв'язування таких систем необхідно, щоб вибраний метод накладав слабкі обмеження на крок сітки /це суттєво зменшує розмірність системи/ і мав досить високий порядок збіжності.

Методи типу Рунге [1, 2] належать до методів високих порядків збіжності і містять лише значення першої похідної оператора системи та довільні параметри. Власне вибором значень цих параметрів, як показано нижче, можна добитися стійкості всіх внутрішніх методів й одночасно найслабших з можливих обмежень на крок сітки по часу.

Доведемо, що метод типу Рунге

$$x_{n+1} = x_n - \omega_n^{-1} \Phi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad /1/$$

де $\Phi(x)$ - оператор лівої частини системи рівнянь $\Phi(x) = 0$;

$$\omega_n = (1 - \beta)\Phi'(x_n) + \beta\Phi'(x_{n-2\beta})\Gamma_n\Phi(x_n), \quad \Gamma_n = [\Phi'(x_n)]^{-1};$$

$\beta \neq 0$ - довільне дійсне число, для розв'язування різницевої схеми газової динаміки в ізотермічному наближенні

$$v_t = -\rho^{(0)}; \quad x_t = v^{(0.5)}; \quad x_s = \frac{1}{\rho}; \quad \rho = \rho(p); \quad \beta = 0.5, \quad /2/$$

вимагає значно слабших обмежень на крок сітки за часом ніж у методі простої ітерації, і дещо жорсткіших, як у методі Ньютона [4, 5].

У випадку слабких хвиль, близьких до акустичних, обмеження, як і для методу Ньютона, практично відсутні. Зауважимо, що отримані далі оцінки на крок за часом мають достатній характер. Як свідчать розрахунки на ЕОМ, метод Рунге збігається з кроком τ не меншим, ніж метод Ньютона. Метод типу Рунге /1/ в застосуванні до системи нелі-

нійних різницевих рівнянь /2/ при $|\beta| > \frac{1}{2}$ має третій порядок збіжності, тоді як метод простої ітерації збігається зі швидкістю геометричної прогресії, а метод Ньютона – квадратично. Отримані конкретні прості умови вибору оптимальних значень параметра β .

Далі дотримуємось позначень, прийнятих у роботах А.А.Самарського і Ю.П.Попова [4, 5].

Для визначення невідомих сіткових функцій v, x, p, ρ на $j+1$ -му шарі застосуємо до системи /2/ метод Рунге /1/. Тоді отримуємо систему лінійних рівнянь, яка зводиться до триточкового рівняння

$$A_i \delta v_{i-1} - C_i \delta v_i + B_i \delta v_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad /3/$$

Коефіцієнти /3/ A_i, B_i, C_i, F_i залежать від номера ітерації K і обчислюються за наступними формулами:

$$\begin{aligned} A_i^K &= \frac{G}{2} \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 [(1-\beta)P'(\rho_{i-1}^K) + \beta P'(\rho_{i-1}^K)] \frac{\rho_{i-1}^K \rho_{i-1}^K}{(1-\beta)\rho_{i-1}^K + \beta\rho_{i-1}^K}, \\ B_i^K &= A_{i+1}^K, \quad C_i^K = 1 + A_i^K + B_i^K, \\ F_i^K &= -f_{1,i} + G\tau \{ f_{2,i} + [(1-\beta)P'(\rho_i^K) + \beta P'(\rho_i^K)] y_i^K \}, \\ y_i^K &= \frac{\rho_i^K \rho_i^K}{(1-\beta)\rho_i^K + \beta\rho_i^K} [f_{3,i} - (f_2)_{s,i}]. \end{aligned} \quad /4/$$

Значення функцій ρ_i^K , наявних у /4/, визначаються однією ітерацією за методом Ньютона з параметром релаксації $\frac{1}{2\beta}$.

Триточкове рівняння /3/ можна розв'язати методом прогонки. Умови стійкості прогонки виконуються, очевидно, принаймні для $0 < \beta \leq 1$.

Доведемо збіжність методу /1/ у застосуванні до системи рівнянь /2/. Для простоти обмежимося розглядом ідеального газу

$$p = P(\rho) = c^2 \rho, \quad c = \text{const.}$$

Застосувавши звичайну процедуру [4,5] і врахувавши позначення $\Delta y^K = y^K - y^{j+1} = \hat{y}^K - \hat{y}$, одержуємо

$$\left(\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2}\right) \Delta \rho^{(n)} - 0,56 c^2 \tau^2 \Delta \rho_{ss}^{(n)} = \left(\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho \rho}\right) \Delta \rho. \quad /5/$$

Запишемо /5/ в індексній формі

$$\left(\frac{1-\beta}{\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} + \frac{2\alpha^2}{h^2}\right) \tilde{z}_i^{(n)} - \frac{\alpha^2}{h^2} (\tilde{z}_{i-1}^{(n)} + \tilde{z}_{i+1}^{(n)}) = \left(\frac{1-\beta}{\rho_i^2} + \frac{\beta}{\rho_i^2} - \frac{1}{\rho_i \rho_i}\right) \tilde{z}_i^{(n)}, \quad /6/$$

де $\alpha^2 = 0,56 c^2 \tau^2$, $\tilde{z}^{(n)} = \Delta \rho^{(n)}$.

Якщо розглядати задачу, де в граничних точках $i = -1$, $i = N$ - задані режими зміни тиску з часом, то можна отримати крайові умови для /6/

$$\tilde{z}_{-1}^{(n)} = 0, \quad \tilde{z}_N^{(n)} = 0. \quad /7/$$

До неоднорідного рівняння /6/ з однорідними крайовими умовами /7/ можна застосувати принцип максимуму, з якого випливає

$$\left\| \tilde{z}^{(n)} \right\|_C \leq \left\| \frac{\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho \rho}}{\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2}} \tilde{z} \right\|_C \leq \left\| \frac{\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho \rho}}{\frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2}} \right\|_C \left\| \tilde{z}^{(n)} \right\|_C, \quad /8/$$

якщо виконується умова

$$D = \frac{1-\beta}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} > 0. \quad /9/$$

Щоб зробити оцінку /8/ більш явном, розкладемо вираз $\frac{\beta}{\rho^2} = \left(\frac{\beta}{\rho - \frac{\alpha}{2\beta}}\right)^2$ у ряд Тейлора в околі точки ρ . Для цього розкладу, записавши залишок ряду в інтегральній формі Коші, достатньо взяти перших членів. Обчисливши відповідний інтеграл, отримаємо

$$\frac{\beta}{\left(\rho - \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2} = \frac{\beta}{\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^3} + \frac{\beta \alpha^2 (3\rho - \alpha)}{\rho^4 (\rho - \alpha)^3}, \quad /10/$$

де $a = \frac{\alpha}{2\beta}$

Значення α , яке входить у /10/, знаходимо, міркуючи таким чином. Нехай дано систему нелінійних рівнянь, записану в операторному вигляді

$$P(x) = 0,$$

де $P: E_n \rightarrow E_n$ - достатня кількість разів диференційованого опера-

торя. Для даного операторного рівняння існує рівність

$$\tilde{a} = \Gamma_{\kappa} P(x_{\kappa}) - \tilde{x} - x - \Gamma_{\kappa} \int_0^1 P'(\tilde{x} + \theta(x - \tilde{x}))(1 - \theta) d\theta \cdot (x - \tilde{x})^2, \quad /II/$$

де $\Gamma_{\kappa} = [P'(\tilde{x})]^{-1}$.

Застосувавши /II/ до системи газодинамічних рівнянь /I/ і врахувавши, що всі другі частинні похідні, крім $\frac{\partial^2 f_{3,i}}{\partial \rho_i^2}$, дорівнюють нулю, а $\frac{\partial^2 f_{3,i}}{\partial \rho_i^2} = -\frac{2}{\rho_i^3}$, отримаємо, що $\tilde{a}_i$ у /IO/ визначається за формулою

$$\tilde{a}_i = \hat{\rho}_i - \hat{p}_i + 2 \left[\Gamma_{\kappa} \int_0^1 \frac{1 - \theta}{[\hat{\rho} + \theta(\hat{\rho} - \hat{\rho}_i)]^3} d\theta \right] (\hat{\rho}_i - \hat{p}_i)^2 - \hat{\rho}_i \hat{p}_i + \left[\Gamma_{\kappa} \frac{1}{\hat{\rho}_i^3} \right] (\hat{\rho}_i - \hat{p}_i)^2, \quad /I2/$$

де Γ_{κ} - матриця, обернена до матриці

$$C_{33} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\rho}_1^3} + 3\alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \frac{1}{\hat{\rho}_2^3} + 2\alpha & -\alpha \\ \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\hat{\rho}_n^3} + 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0.5 \cdot 6 \left(\frac{C_p T}{\kappa} \right)^2$$

Матрицю C_{33} можна отримати при знаходженні методом кліток оберненої матриці до P' , де P - оператор лівої частини системи рівнянь /2/.

Якщо підставимо /IO/, /I2/ у нерівність /8/, то

$$\|\tilde{x}''\|_c \leq q_{\kappa} \|\tilde{x}\|_c, \quad /I3/$$

де

$$q_{\kappa} = \left\| \frac{1 - \tilde{a} \hat{\rho}}{\hat{\rho}(\hat{\rho} + \tilde{a} + \alpha \tilde{x})} \right\|_c; \quad \tilde{a} \hat{\rho} = \frac{(1 + \tilde{\delta} \tilde{x})^2 (-3\hat{\rho} \hat{\rho} + \tilde{x} + \tilde{\delta} \tilde{x}^2)}{(2\hat{\rho} \hat{\rho} - \tilde{x} - \tilde{\delta} \tilde{x}^2)^2}; \quad \tilde{\delta} = \Gamma_{\kappa} \frac{1}{\hat{\rho}_i^3}.$$

Позначимо $q = \max_{\kappa} q_{\kappa}$. Тоді

$$\|\tilde{x}''\|_c \leq q \|\tilde{x}\|_c. \quad /I4/$$

Умова /I4/ після багатократного застосування зводиться до вигляду

$$\|\tilde{x}''\|_c \leq (q^k \|\tilde{x}\|_c)^{k+1} \|\tilde{x}\|_c.$$

Очевидно, ітераційний процес Рунге збігається, якщо виконується нерівність $q^k \|\tilde{x}\|_c < 1$, яка рівносильна умові

$$q \|\tilde{x}\|_c^2 < 1. \quad /I5/$$

З нерівностей /I4/, /I5/ випливає

$$\|\tilde{x}''\|_c \leq \|\tilde{x}\|_c \leq \dots \leq \|\tilde{x}\|_c, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad /I6/$$

Легко показати, що існує нерівність

$$\left\| \frac{1}{1-x} \right\|_c \leq \frac{1}{1-\|x\|_c}, \quad /17/$$

яка справедлива для векторів x таких, що $\|x\|_c < 1$.

Умова /15/ рівносильна співвідношенням

$$q_k \|x\|_c^2 < 1, \quad k=0,1,2,\dots \quad /18/$$

Застосовавши /17/ до лівої частини нерівності /18/ і врахувавши /16/, після нескладних перетворень отримаємо умову

$$\left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|x\|_c^2 + \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c (1+2\delta + \frac{\tilde{Q}}{2|\beta|}) \|x\|_c^2 < 1, \quad /19/$$

де $\delta = \|g\|_c \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c^2$; $\tilde{Q} = \frac{(1+\delta \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|x\|_c)^2 [3\|\beta\|_c + (\|x\|_c \delta \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|x\|_c^2) \frac{1}{\beta}] \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|\beta\|_c}{[1 - (\|x\|_c + \delta \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|x\|_c^2) \frac{1}{\beta}]^2}$

Неважко переконатися, що при виконанні нерівності /19/ задовольняється умова /9/, яка є одночасно умовою стійкості методу прогонки, а при $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ гарантується не нижче, ніж третій порядок збіжності методу /1/ в застосуванні до розв'язування системи газодинамічних рівнянь /2/. Зауважимо, що вираз $\frac{\tilde{Q}}{2|\beta|}$ за рахунок вибору параметра β можна зробити досить малим, а $\|g\|_c < \sqrt{\kappa} \|\beta\|_c^2$.

Доцільно припустити [3], і це підтверджується числовими розрахунками, що для того щоб задовольнити нерівність /19/ при довільному k , достатньо вимагати виконання її на нульовій ітерації. За початкове наближення беруть, як правило, значення сіткових функцій з попереднього шару. Тоді /19/ набуде такого вигляду:

$$\|z\|_c \|\beta\|_c \tau + \|z\|_c \left\| \frac{1}{\beta} \right\|_c \|\beta\|_c^2 (1+2\delta + \frac{\tilde{Q}}{2|\beta|}) \tau^2 < 1, \quad /20/$$

де $\tau = \frac{1}{\beta}$, $\tilde{z} = \frac{1}{\beta}$; δ і $\tilde{Q}$ - значення δ і $\tilde{Q}$ на нульовій ітерації.

Таким чином, значення параметра β бажано вибирати якомога більшим. При цьому забезпечуються стійкість методу прогонки, високий порядок збіжності методу Рунге і менш жорсткі обмеження на крок сітки за часом.

Розглянемо, до яких обмежень на крок сітки приводить умова збіжності ітерацій /20/ для розрахунку руху ударної хвилі, що виникає у задачі про поршень.

Використовуючи наведені у праці [5] позначення і значення норм функцій, які входять у нерівність /20/, можна отримати оцінку для максимально можливого кроку сітки за часом:

$$0 < \tau < \frac{1}{2} \pi \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \tau_{N1} \frac{\sqrt{1+4(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})}-1}{(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})} \quad /21/$$

З нерівності /21/ визначаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \tau_p = \frac{\tau}{\tau_{N1}} &< \pi \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \frac{\sqrt{1+4(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})}-1}{2(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})} < \pi \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \frac{\sqrt{[1+2(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})]^2-1}}{2(1+2\delta+\frac{Q}{2/A_1})} \quad /22/ \\ &= \pi \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \tau_N, \end{aligned}$$

де τ_p і τ_N - відповідно величини співвідношень для методу Рунге /1/ і методу Ньютона.

Порівнявши оцінку з праці [5] для найпростішого ітераційного процесу $\frac{\tau}{\tau_{N1}} < \frac{1}{\tau_N}$ з оцінками /22/, можна зробити висновок, що метод Рунге /1/ вимагає суттєво слабших обмежень на крок сітки за часом, ніж метод простої ітерації, і дещо жорсткіших, ніж метод Ньютона. Однак метод Рунге має порядок збіжності, не нижчий третього.

Як видно з умови /22/, максимальний крок τ залежить від сили хвилі /від значення α /. При $\alpha \rightarrow 1$, що відповідає слабким хвилям, які близькі до акустичних, обмеження практично відсутні. При $\alpha \rightarrow 0$, що відповідає сильним ударним хвилям, для розрахунку вимагається малий крок τ .

Теоретичні висновки перевіряли розв'язуючи класичну задачу про поршень, який всувається в газ з постійною швидкістю, внаслідок чого виникає ударна хвиля. Вихідні дані задачі для порівняння брали з праці [5]. Результати розв'язування задачі ітераційним методом типу Рунге /1/ порівнювали з результатами, одержаними за методом Ньютона.

Кількість ітерацій за методами типу Рунге та Ньютона

τ	Номер часового шагу	Метод Ньютона	Кількість ітерацій Метод типу Рунге				
			$\beta=0,1$	$\beta=0,25$	$\beta=0,5$	$\beta=0,75$	$\beta=1$
0,1	1	5	4	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	3	3
	3	4	4	4	3	3	3
	4	4	4	4	3	3	3
	5	4	4	3	4	3	3
	6-16	4	4	3	3	3	3
0,3	1	5	5	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	4	4
	3	5	4	4	4	4	4
	4	5	4	4	4	3	4
	5	5	4	4	4	3	3
	6	5	4	4	4	3	4
	7	5	4	4	4	3	3
	8	5	4	4	4	3	3
0,5	1	5	5	4	4	4	4
	2	5	4	4	4	4	4
	3	5	4	4	4	4	4
	4	5	4	4	4	4	4
	5	5	4	4	4	3	4
	6	5	5	4	4	4	4

Як видно з таблиці, розрахунки повністю підтверджують всі теоретичні висновки. Коли вибирати $\beta \in (0; 1]$, то метод /1/ розбігається, як правило, при будь-яких τ . Це зумовлено нестійкістю прогонки. Швидкість збіжності при $\beta \in [0,5; 1]$ відповідає теоретичній. Виявилось, що метод Рунге, як і метод Ньютона, збігається для τ , але набагато перевищує τ_n . Зокрема, при $\tau = 1,6$, коли за один часовий інтервал фронт ударної хвилі просувається на 16 масових інтервалів, методи Рунге і Ньютона збігаються за 4 і 6 ітера-

ції відповідно. Такий крок недопустимий, звичайно, з точки зору точності. Параметр доцільно вибирати з інтервалу $[0,6; 0,9]$.

Список літератури: 1. Бартиш М.Я., Сеньо П.С. О методе типа Рунге для решения нелинейных операторных уравнений. - ДАН УССР, сер. А, 1972, № 9. 2. Бартиш М.Я., Сеньо П.С. О методе Рунге решения нелинейных операторных уравнений третьего и четвертого порядка сходимости. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 29. 3. Попов Ю.П., Самарская Е.А. О сходимости итерационного метода Ньютона для решения разностных уравнений газовой динамики. - ЖВМФ, 1977, 17, № 2. 4. Попов Ю.П., Самарский А.А. О методах численного решения одномерных нестационарных задач газовой динамики. - ЖВМФ, 1976, 16, № 6. 5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - М.: Наука, 1975.

Стаття надійшла в редколегію 18.12.1979 р.

УДК 518:517.9:533.7

С.М.Шахно

ПРО ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Для решения задачи, яка розглядається у праці [2], застосуємо метод [1]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [P'(\theta_n)]^{-1} P(x_n), \quad \theta_0 = x_0, \\ \theta_i &= x_i - \frac{1}{2} [P'(\theta_{i-1})]^{-1} P(x_i), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad /1/$$

Як відомо [1], метод /1/ має порядок збіжності, що дорівнює $1+\sqrt{2}$.

Для реалізації методу /1/ на кожній ітерації необхідно розв'язувати два триточкових рівняння $A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} = -F_i$,

$i=1, 2, \dots, N-1$ з однаковими коефіцієнтами A_i, B_i, C_i і різними правими частинами F_i . Це можна здійснити методом прогонки. Легко переконатись, що тоді умова стійкості прогонки

виконуватися. Коефіцієнти методу прогонки α_i обчислюються при цьому один раз.

Зауважимо, що коефіцієнти F_i^I , F_i^{II} першого та другого три-точкового рівняння відрізняються лише деякими співмножниками. Тому кількість обчислень при застосуванні методу /I/ майже та ж сама, що і для методу Ньютона. Однак швидкість збіжності методу /I/ вища, ніж у методі Ньютона. Порівняно з методом типу Рунге [2] метод /I/ вимагає менше обчислень на кожній ітерації. Проте збіжність дещо повільніша, ніж у методі Рунге.

Як і в праці [2], для розрахунків на ЕОМ розглядаємо класичну задачу про поршень, що всувається в газ з постійною швидкістю. Внаслідок руху поршня виникає ударна хвиля. Щоб зробити можливим наскрізний розрахунок, у різницеву схему вводили псевдов'язкість. Обчислення проводили з відносною точністю $\epsilon = 10^{-4}$ на ЕОМ М-222.

Одержані результати добре узгоджуються з точним, а також наближеними розв'язками, отриманими методами Ньютона і Рунге. Як показали обчислення, метод /I/ дає змогу вести розрахунок з досить крупним кроком за часом, практично без обмежень. Тому при виборі кроку необхідно користуватися вимогами, які повинна задовольняти точність шуканого розв'язку. Щоб отримати розв'язок задачі з більшою точністю, необхідно крок τ вибирати меншим. Згідно з розрахунками, метод /I/ збігається з такою швидкістю, як і метод Рунге, при значенні параметра $\beta = 0.1$ [2]. Однак обчислень на кожній ітерації суттєво менше /на 25%/, ніж у методі Рунге. Порівняно з методом Ньютона метод /I/ збігається за меншу кількість ітерацій і вимагає на 15% менше обчислень, тобто він ефективніший.

Список літератури: І. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. - ДАН УРСР, серія А, 1968, № 5. 2. С е н ь о П.С., Ш а х н о С.М. Розв'язування різницевих рівнянь газової динаміки ітераційним методом типу Рунге. - У цьому ж Віснику.

Стаття надійшла в редколегію 16.09.1979 р.

Ю.М.Щерба

ПРО ОДИН РЕКУРСИВНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД
ІЗ ЗБУРЕННЯМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язування нелінійних операторних рівнянь, зокрема нелінійних систем рівнянь з багатьма невідомими, — важлива задача сучасної обчислювальної математики. Задачами, чисельний розв'язок яких зводиться до розв'язування нелінійних систем рівнянь з багатьма невідомими, є двоточкові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, еліптичні крайові задачі, інтегральні рівняння, задачі мінімізації, двовимірні варіаційні задачі тощо.

Найчастіше для розв'язування нелінійних операторних рівнянь застосовують методи ньютонівського типу. Фундаментальною працею з цього питання є стаття Л.В.Канторовича [3]. Користуючись запропонованою Л.В.Канторовичем методикою, досліджено інші методи такого типу, а також їх різницеві аналоги.

У переважній більшості праць, присвячених вивченню методів ньютонівського типу, аналізуються, як правило, класичні умови збіжності методів: вважається, що всі обчислення виконуються точно. Отримані оцінки швидкості збіжності, таким чином, є оцінками дохибки методів, що розглядаються.

Широке застосування ЕОМ для розв'язування нелінійних задач вимагає як досліджень властивостей збіжності методів з урахуванням похибок заокруглень, так і побудови обчислювальних схем, що більш ефективні для реалізації на ЕОМ, ніж метод Ньютона.

При чисельній реалізації методів ньютонівського типу на кожному кроці для визначення вектора поправки необхідно розв'язувати одне або у більш загальному випадку декілька лінійних операторних рівнянь. Важливо знати, наскільки стійкий алгоритм відносно як до випадкових помилок в обчисленнях, так і до прийомів, що полягають у заміні об-

Множини лінійних рівнянь. Для нелінійної системи рівнянь з багатьма невідомими ці прийоми полягають у застосуванні методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь під час визначення вектора поправки. При розв'язуванні таких систем доцільно використовувати метод Гаусса з вибором головного елемента. Тоді значення вектора поправки отримують з деякою похибкою, яка зумовлена заокругленнями при виконанні арифметичних операцій на ЕОМ. У праці [4] показано, що розв'язок, обчислений методом Гаусса з вибором головного елемента, точно задовольняє систему рівнянь зі збуреною матрицею. Більше того, норма збурення не перевищує деякого числа, яке можна обчислити, і що його містить у ролі співмножника добуток одиничної похибки заокруглень на норму матриці системи. Оцінка норми збурення не залежить від правої частини лінійної системи.

У зв'язку з цим для дослідження властивостей збіжності обчислювальних методів доцільно розглядати варіанти алгоритмів із збуреннями [1]. Ми розглянемо рекурсивний метод, який можна отримати на основі теореми, сформульованої у праці [2].

Нехай дано нелінійне операторне рівняння

$$P(x) = 0, \quad /I/$$

де оператор P переводить елементи банахового простору X в елементи банахового простору Y . Надалі вважатимемо, що оператор

P у деякому околі розв'язку x^* рівняння /I/ має необхідну кількість обмежених похідних за Фреше і оператор $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ існує обмежений.

Приймемо в теоремі I з праці [2].

$$\Omega(x) = x - \Gamma(x)P(x).$$

Нехай оператор $\Phi(x)$ породжує ітераційну формулу порядку φ .

Для $H(x) = [P'(x - \Gamma(x)P(x))]^{-1}$ неважко дістати

$$\| [P'(\Phi(x_n))]^{-1} - [P'(x_n - \Gamma(x_n)P(x_n))]^{-1} \| = O(\|x_n - x^*\|^2).$$

Отже, на теоремі I із праці [2] порядок збіжності ітерационного методу, який породжується оператором

$$Q(x) = \varphi(x) - [P'(x - \Gamma(x)P(x))]^{-1} P(\varphi(x)), \quad /2/$$

дорівнює $q = \min \{2\gamma, \gamma + 2\}$.

Багатократне застосування теореми I з праці [2] дає змогу на основі /2/ побудувати ефективний рекурсивний алгоритм.

Приймемо

$$A_j(x) = A_{j-1}(x) - [P'(x - \Gamma(x)P(x))]^{-1} P(A_{j-1}(x)), \quad /3/$$

де $j = 2, 3, \dots, t$;

$$A_1(x) = x - \frac{1}{2} \Gamma(x)P(x) - \frac{1}{2} [P'(x - \Gamma(x)P(x))]^{-1} P(x). \quad /4/$$

Послідовно вибираючи у /2/ $\varphi(x) = A_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, t-1$, отримаємо, що порядок збіжності алгоритму

$$x_{n+1} = A_t(x_n) \quad /5/$$

дорівнює $3 + 2(t-1) = 2t + 1$.

Справді, порядок збіжності алгоритму, що породжується оператором /4/ дорівнює трьом, а кожне застосування /3/ збільшує порядок збіжності методу, що породжується оператором /3/, на два.

Важливою перевагою алгоритму /5/ порівняно з рекурсивними методами, поданими у праці [2], є те, що він використовує лише похідні першого порядку.

Порівняно з іншими відомими методами високого порядку збіжності алгоритм /5/ має і ту перевагу, що найбільш трудомісткі обчислення /наприклад, у випадку нелінійної системи рівнянь з багатьма невідомими - побудова матриці системи та LU - розклад [4] /виконуються лише через декілька кроків. Більше того, як добре видно з /3/-/4/, ця матриця спільна зразу для декількох лінійних систем. Точніше кажучи, необхідно виконувати побудову та LU - розклад [4] лише двох матриць: $P'(x)$ та $P'(x - \Gamma(x)P(x))$ через кожні t кроків при порядку збіжності $2t + 1$. Тут, природно, виникає питання про оптимальне значення параметра t /"глибина рекурсії"/. Очевидно,

це значення залежить від конкретного класу задач і може вибиратись на основі відомих критеріїв ефективності. Зрозуміло, що при розв'язуванні конкретної задачі значення t задається ваздалегідь. Воно визначає кількість кроків, протягом яких значення операторів $P'(x)$ та $P'(x - f(x)P(x))$ не обчислюються заново.

Розглянемо зараз, як похибки заокруглень при обчисленнях впливають на властивості збіжності алгоритму /5/. Далі вважатимемо, що у /1/ оператор P діє з простору R^N у простір R^N . Таким чином, /1/ - це нелінійна система N рівнянь з N невідомими. Замість обертання матриці Якобі розв'язуємо систему лінійних рівнянь - це значно вигідніше за кількість операцій. Запишемо обчислювальну схему методу /5/, де верхній індекс - лічильник глибини рекурсії,

$d_n, x_n, P(x_n), u_n, z_n, f_n, S_n$ - N - вектори, $P'(x_n), P'(f_n)$ - $N \times N$ матриці /Якобі/:

$$\begin{aligned} P'(x_n) d_n &= P(x_n), \\ f_n &= x_n - d_n, \\ P'(f_n) u_n &= P(x_n), \\ z_n^{(1)} &= x_n - \frac{1}{2}(d_n + u_n), \\ P'(f_n) S_n^{(j-1)} &= P(z_n^{(j-1)}), \\ z_n^{(j)} &= z_n^{(j-1)} - S_n^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots, t, \\ x_{n+1} &= z_n^{(t)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad /6/$$

Як бачимо, у схемі /6/ необхідно лише два рази побудувати матрицю Якобі та провести її $L U$ - розклад. Це основні обчислення, обсяг решти обчислень незначний.

Згідно з працею [4] наближений розв'язок лінійної системи на ЕОМ за допомогою гауссівського $L U$ - розкладу еквівалентний точному розв'язку цієї системи зі збуреною матрицею. Тому для теоретичного дослідження алгоритму, показаного схемою /6/, перепишемо її у вигляді:

$$(P'(x_n) + \tilde{V}(x_n))d_n = P(x_n),$$

$$f_n = x_n - d_n,$$

$$(P'(f_n) + V(x_n))u_n = P(x_n),$$

$$e_n^{(1)} = x_n - \frac{1}{2}(d_n - u_n),$$

$$(P'(f_n) + V^{(j-1)}(x_n))s_n^{(j-1)} = P(e_n^{(j-1)}),$$

$$e_n^{(j)} = e_n^{(j-1)} - s_n^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots, k,$$

$$x_{n+1} = e_n^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

/7/

Застосовуючи теорему I з праці [2], одержуємо, що в методі /5/ максимальна допустима похибка при розв'язуванні лінійних систем характеризується величиною

$$\|\tilde{V}(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|) = O(\|P(x_n)\|), \quad /8/$$

$$\|V(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|^2) = O(\|P(x_n)\|^2), \quad /9/$$

$$\|V^{(j-1)}(x_n)\| = O(\|x_n - x^*\|^2) = O(\|P(x_n)\|^2), \quad /10/$$

$$j = 2, 3, \dots, k; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

для забезпечення порядку збіжності $2k+1$. Це свідчить про добру стійкість рекурсивних методів.

Якщо потрібна точність розв'язування лінійних систем на деяких ітераціях не досягається із-за властивостей матриці Якобі або ресурсів ЕОМ, то після методу Гаусса слід застосовувати процедуру ітераційного уточнення [4] розв'язку лінійної системи. Ця процедура не вимагає великої кількості операцій, а без неї використання алгоритму високого порядку збіжності може втратити зміст внаслідок істотного зменшення порядку збіжності.

Список літератури: І. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Исследование условий сходимости и оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып. 28.

2. Бартиш М.Я., Шершина Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. - В.кн.: Математический сборник. Киев: Наукова думка, 1976. 3. Канторович Л.В., О методе Ньютона. Труды математического ин-та им. Стеклова, 1949, № 28. 4. Фортсайд Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969.

Стаття надійшла в редакцію 24.09.1979 р.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Візьмемо інтегральне рівняння

$$u(x, y) = \iint_D K(x, y, \xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta + f(x, y) \quad /1/$$

з неперервним ядром $K(x, y, \xi, \eta, u)$ і неперервним вільним членом $f(x, y)$. D - криволінійна область, обмежена по x прямими $x = a$ і $x = b$, а по y кривими $y = g(x)$ і $y = h(x)$.

Рівняння /1/ розглядаємо як функціональне

$$u = Tu \quad /1'/$$

у просторі $E = L_2(D)$ із нормою

$$\|u\|^2 = \iint_D u^2(x, y) dx dy,$$

де T - нелінійний оператор вигляду

$$Tu = \iint_D K(x, y, \xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta + f(x, y). \quad /2/$$

визначений на деякій множині $\Omega(E)$.

Наближений розв'язок /1/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad /3/$$

де $\{\varphi_k(x, y)\}$ - лінійно незалежна повна ортонормована система функцій в області зміни $y \in [g(x), h(x)]$. Шукані коефіцієнти

$C_n(x)$ ($n=1, 2, \dots, n$) визначасмо в системі

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \left\{ u_n(x, y) - \iint_D K(x, y, \xi, \eta, u_n(\xi, \eta)) - f(x, y) \right\} \varphi_m(x, y) dy = 0, \quad /4/$$

$m=1, 2, \dots, n,$

що є системою нелінійних інтегральних рівнянь відносно шуканих функцій $C_n(x)$.

Позначимо через E_n множину функцій вигляду $g_n(x, y) = \sum_{k=1}^n L_k(x) \varphi_k(x, y)$, де $L_k(x)$ - довільні інтегровні з квадратом функції; E_n - замкнений підпростір у E . Введемо ортогональний проектор P_n , що проектує E на E_n :

$$P_n h(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{g(x)}^{h(x)} h(x, y) \varphi_k(x, y) dy \right) \cdot \varphi_k(x, y); \quad h(x, y) \in E.$$

Тепер нелінійну систему інтегральних рівнянь /4/ можемо розглядати як функціональне рівняння у просторі E_n

$$u_n = P_n T u_n, \quad /4'/$$

де оператор $P_n T$ визначений на елементах $z_n(x, y) = \sum_{k=1}^n L_k(x) \varphi_k(x, y)$ із множини $\Omega \cap E_n$.

Т е о р е м а . Нехай /1/ має розв'язок $u^*(x, y)$, а ядро рівняння $K(x, y, \xi, \eta, u)$ неперервне по сукупності змінних в області

$$a \leq x, \xi \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x), \quad g(\xi) \leq \eta \leq h(\xi), \quad |u(\xi, \eta) - u^*(\xi, \eta)| \leq \delta / 5 /$$

і вільний член $f(x, y)$ неперервний в області D .

Тоді справедливі наступні твердження:

а/ якщо розв'язок $u^*(x, y)$ ненульового індексу ізольований у просторі $C(D)$, то при достатньо великих n /4/ має у сфері $\|u - u^*\| \leq \delta$, ($\delta = \delta \forall mes D$) хоча б один розв'язок $u_n(x, y)$ і всі такі розв'язки $u_n(x, y)$ прямують за нормою при $n \rightarrow \infty$ до $u^*(x, y)$;

б/ коли ядро рівняння $K(x, y, \xi, \eta, u)$ має частинну похідну по u неперервну щодо сукупності змінних в області /5/, а для лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$K(x, y, z, t) = \int_{\bar{K}} K_0(x, y, z, t, u) H(t, u) d\tau du, \\ \text{де} \quad K_0(x, y, z, t) = \frac{\partial K(x, y, z, t, u^*(t, u))}{\partial u},$$

існує лише нульовий розв'язок, то при достатньо великих n рівняння /4'/ в сфері $\|u - u^*\| \leq \delta_2$ достатньо малого радіуса δ_2 має єдиний розв'язок u_n , причому справедлива оцінка збіжності

$$c_1 \|u^* - u_n^*\| \leq \|u^* - u_n\| \leq c_2 \|u^* - u_n^*\|, \quad /6/$$

де $u_n^* = P_n u^*$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$.

Д о в е д е н н я . Неперервність ядра $K(x, y, z, t, u)$ в області /5/ зумовлює повну неперервність оператора T на сфері $\bar{K}$:

($\|u - u^*\| \leq \delta_1$) . Звідси, враховуючи обмеженість операторів

P_n та умову $\|u - P_n u\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для довільного $u \in E$, маємо

$$\sup_{u \in \bar{K}} \|U_n u\| = \sup_{u \in \bar{K}} \|(T - P_n T)u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad /7/$$

А відомо ³, що існує розв'язку $u^*(x, y)$ рівняння /1'/ один і той же у просторах E і C , а за припущенням він відмінний від нуля. Використовуючи теорему 19.4 /з уже цитованої праці/, отримуємо твердження а/.

Перейдемо тепер до твердження б/. Оскільки оператор T - неперервний, а $P_n \rightarrow I$ сильно, то

$$\|P_n T P_n u^* - T u^*\| \leq \|P_n T P_n u^* - T P_n u^*\| + \|T P_n u^* - T u^*\| \rightarrow 0 \quad /8/$$

при $n \rightarrow \infty$. Існування неперервної в області /5/ частинної похідної $\frac{\partial K(x, y, z, t, u)}{\partial u}$ зумовлює неперервну диференційованість T у сфері $\|u^* - u\| \leq \delta$, . Тому виконується співвідношення

$$\|P_n T'(P_n u^*) - T'(u^*)\| \leq \|P_n T'(P_n u^*) - T'(P_n u^*)\| + \|T'(P_n u^*) - T'(u^*)\| \rightarrow 0 \quad /9/$$

при $n \rightarrow \infty$.

Ж К р а с н о с е л ь с ь к и й М.А. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969.

Оскільки оператор $T(u^*)h(x,y) = \int_0^1 h(x,y,t)h(t,y)dt$ цілком неперервний у E_n і рівняння $u = T'(u^*)h$ має за умовою теореми лише нульовий розв'язок, то для оператора $I - T'(u^*)$ існує обмежений обернений, а також виконується нерівність

$$\|P_n T'(u) - P_n T'(P_n u^*)\| \leq \|T'(u) - T'(P_n u^*)\| < \varepsilon \quad /10/$$

для всіх $n \geq n_\varepsilon$, за умови $\|u - P_n u^*\| \leq \delta_\varepsilon$ при $u \in \Omega_{n^*} = \Omega \cap E_n$.

Використовуючи тепер теорему 19.1 наведеної праці, одержуємо, що знайдуться такі n_0 і δ_2 , коли при $n \geq n_0$ /4/ має в сфері $\|u - u^*\| \leq \delta_2$ єдиний розв'язок $u_n(x,y)$. Із теореми 19.7 цієї ж праці випливає оцінка швидкості збіжності /6/.

Теорема доведена.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 519.21

І.М.Дудзятний, Є.В.Москвяк

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

У дослідженні тривалості активної праці виробів важливе місце належить функції розподілу ймовірностей [2].

$$H(t, \alpha, \beta, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\alpha(\frac{t}{\beta})^\beta} e^{-x} x^{\beta-1} dx, \quad t \geq 0, (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0), \quad /1/$$

де α і α - параметри масштабу; β і β - параметри форми.

При $\alpha = \beta = 1$ дістаємо функцію гамма-розподілу

$$F(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \tau^{\beta-1} d\tau, \quad t \geq 0, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad /2/$$

а при $\alpha = \beta = 1$ - функцію розподілу Вейбула

$$G(t, \alpha, \beta) = 1 - e^{-(\frac{t}{\beta})^\beta}, \quad t \geq 0, (\alpha > 0, \beta > 0). \quad /3/$$

Розподіл /1/ описує широкий клас руйнування виробів: від крихкого /2/ до руйнування зі значною деформацією /3/. Відзначимо, що апріорі не завжди відомо, якого типу руйнування відбувається у конкретному випадку. Як правило, відома лише статистична інформація про руйнування, на основі якої необхідно визначити сам закон розподілу, а також параметри цього розподілу.

Коли апріорі вважати, що руйнування підпорядковується одному з двох законів розподілу /2/ або /3/, то чотирипараметричний розподіл /1/ можна використати для визначення цих двопараметричних законів розподілу.

На основі відомих властивостей функції розподілу

$$H(0, \alpha, \beta, \alpha, \beta) = 0,$$

$$H(\infty, \alpha, \beta, \alpha, \beta) = 1 \quad /4/$$

функцію /1/ легко звести до трипараметричної функції розподілу

$$h(t, \alpha, \beta, \rho) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t e^{-\tau} \tau^{\rho-1} d\tau, \quad t \geq 0, (\alpha > 0, \beta > 0, \rho > 0). \quad /5/$$

Згідно з методом моментів для визначення параметрів α, β, ρ у розподілі /5/ отримуємо систему нелінійних рівнянь

$$h(t_i, \alpha, \beta, \rho) = \frac{t_i - 0.1}{N + 0.4}, \quad i = 1, 2, 3, \quad /6/$$

де t_i - час виходу із ладу k_i деталей /зразків/ з N узятих для спостереження.

При розв'язуванні нелінійної системи /6/ на ЕОМ одержуємо наближені результати. Тому співвідношення

$$h(0, \alpha, \beta, \rho) = 0,$$

$$h(\infty, \alpha, \beta, \rho) = 1 \quad /7/$$

на ЕОМ можуть практично і не виконуватись.

У зв'язку з цим пропонуємо розв'язок системи рівнянь /6/, /7/ замінити знаходженням мінімуму функціоналу

$$\pi^2(\alpha, \beta, \rho) = \sum_{i=1}^N (h(t_i, \alpha, \beta, \rho) - \frac{K_i - 0.3}{N + 0.4})^2, \quad /8/$$

де t_i - час виходу із ладу всіх N деталей.

Для визначення тих значень параметрів α, β, ρ , за яких функціонал /8/ досягає свого мінімуму, використовуємо градієнтний метод [1]. Тоді всі параметри отримують прирости таким чином, щоб результуючий рух у параметричному просторі відбувався вздовж анти-градієнта.

Метод мінімізації функціоналу /8/ для знаходження параметрів α, β, ρ реалізовано у підпрограмі *GRADLS* /Фортран-4/. Оператор початкового рядка

SUBROUTINE GRADLS (X, Y, SIG, NP, NT, M, A, DA, YF, SN)/9/

де X - масив незалежних змінних $t_i, i = \overline{1, NP}$; Y - масив відповідних значень емпіричної функції розподілу

$$H_{емп}(t_i) = \frac{K_i - 0.3}{N + 0.4}, \quad i = \overline{1, NP}. \quad /10/$$

Масив A розмірності NT містить початкові значення параметрів, а масив DA - їхні прирости. На основі експериментальної перевірки, на ЕОМ виявлено, що всі елементи масиву A достатньо прийняти на початку рівними одиниці, а елементи DA - 0,05. YF - масив значень функції /5/, а саме

$$YF(i) = h(t_i), \quad i = \overline{1, NP}. \quad /11/$$

Параметрам M і SIG при виклику підпрограми необхідно відповідно присвоїти 0 і 1.

На виході масив A дає значення шуканих параметрів, при яких функціонал /8/ досягає мінімуму; SN - абсолютне значення цього мінімуму.

На основі проведених експериментів для найбільш "доброго" наближення емпіричної функції розподілу /10/ за допомогою функції

розподілу /5/ час t_i доцільно вибирати таким, щоб

$$\frac{K_1 - 0,3}{N + 0,4} \approx 0,25; \quad \frac{K_2 - 0,3}{N + 0,4} \approx 0,5; \quad \frac{K_3 - 0,3}{N + 0,4} \approx 0,75. \quad /12/$$

Якщо параметри α, θ, β трипараметричної функції розподілу /5/ знайдені, то легко визначити, який вид руйнування /2/ або /3/ наявний при даному статистичному матеріалі. Коли $\beta \approx 1$, то маємо розподіл Вейбула, а при $\theta \approx 1$ - функцію гамма-розподілу.

За умови, що θ і β не дають змоги оцінити вид руйнування, необхідно провести додаткові статистичні дослідження.

Для визначення параметрів α, β гамма-розподілу, або α, θ розподілу Вейбула скористаємось мінімізацією відповідних функціоналів

$$S_1^2(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (F(t_i, \alpha, \beta) - H_{emp}(t_i))^2, \quad /13/$$

або

$$S_2^2(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n (G(t_i, \alpha, \theta) - H_{emp}(t_i))^2. \quad /14/$$

У цьому випадку для задання початкових значень параметрів /елементи масиву A / можна скористатися значеннями знайдених параметрів α, θ, β розподілу /5/.

Запропонована методика знаходження параметрів розподілу процесів руйнування дає змогу удосконалити інженерні способи обробки статистичної інформації про надійність виробів машинобудування з відповідним рівнем вимогливості до їхньої достовірності.

Список літератури: І. В а с и л ь е в Ф.Т. Лекции по методам решения экстремальных задач. - М.: Изд-во Москов. ун-та, 1974.
З. К в і т І.Д., М о с к в я к Є.В. Розподіли деяких процесів руйнування. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979 вип. 15.

Стаття надійшла в редколегію 14.09.1979 р.

А.Ф.Барвіноський, І.М.Лудзкий

ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ
ПАРАМЕТРАМИ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ОДНИМ НЕЛІНІЙНИМ РІВНЯННЯМ
З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду:

$$\alpha(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \gamma(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon F(\tau, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \quad /1/$$

де ε - малий параметр; $\tau = \varepsilon t$ - "повільний час"; $\alpha(\tau), \beta(\tau), \gamma(\tau)$ - повільно змінні коефіцієнти, що задовольняють умову гіперболічності [7] для відповідного однорідного $\varepsilon = 0$ рівняння

$$\beta^2(\tau) - 4\alpha(\tau)\gamma(\tau) > 0; \quad /2/$$

$F(\tau, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ - відома нелінійна функція своїх аргументів.

Відзначимо, що приймавши $\varepsilon = 0$, з рівняння /1/ одержуємо:

а/ при

$$\alpha = \frac{E}{\rho} - V_0^2; \quad \beta = -2V_0; \quad \gamma = -1, \quad /3/$$

де E - модуль пружності; ρ - маса одиниці об'єму, лінійне диференціальне рівняння поздовжніх коливань стрічки, яка переміщається зі сталою швидкістю V_0 вздовж своєї осі [8];

б/ при

$$\alpha = \frac{T_0}{\rho} - V_0^2; \quad \beta = -2V_0; \quad \gamma = -1, \quad /4/$$

де T_0 - початковий натяг струни, лінійне диференціальне рівняння поперечних коливань струни, яка рухається зі сталою швидкістю V_0 вздовж своєї осі [9];

в/ при

$$\alpha = \frac{T_0 - \rho f_0 - m_1 V_0^2}{m_1 + m_2}; \quad \beta = \frac{-2V_0 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \gamma = -1, \quad /5/$$

де T_0 - натяг шланга; m_1 - маса одиниці довжини шланга; m_2 - ма-

са рідини, що припадає на одиницю довжини шланга; F_0 - площа внутрішнього перерізу шланга; ρ - тиск в рідині на ділянці коливань, лінійне диференціальне рівняння поперечних коливань вертикального гнучкого шланга, по якому зі сталою швидкістю V_0 тече ідеальна нестислива рідина [6].

Задача про коливання згаданих механічних систем із врахуванням геометричної і фізичної нелінійностей, а також повільної зміни параметрів коливань систем, зводиться до дослідження розв'язку межевої задачі для нелінійного рівняння /1/.

Враховуючи наявність малого параметра, при побудові розв'язку слабонелінійного диференціального рівняння /1/ використаємо асимптотичний метод нелінійної механіки. При цьому досліджуємо коливання, близькі до коливань у K -й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Функцію переміщень $u(x, t)$ подamo у вигляді асимптотичного ряду

$u(x, t) = a[\varphi_{1K}(x) \cos \varphi_K + \varphi_{2K} \sin \varphi_K] + \varepsilon u_{1K}(x, t, \alpha, \varphi_K) + \varepsilon^2 \dots$, /6/
де $\varphi_{1K}(x) \cos \varphi_K + \varphi_{2K} \sin \varphi_K$ - розв'язок відповідної незбуреної / $\varepsilon = 0$ / межевої задачі для /1/; a і φ_K - амплітуда і фаза, які визначають із системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_{1K}(t, \alpha) + \varepsilon^2 \dots; \\ \frac{d\varphi_K}{dt} &= \omega_K(t) + \varepsilon B_{1K}(t, \alpha) + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \quad /7/$$

де $u_{1K}(x, t, \alpha, \varphi_K)$ - невідомі; 2π - періодичні по φ_K функції.

Тепер необхідно знайти функції

$$u_{1K}(x, t, \alpha, \varphi_K), \dots; A_{1K}(t, \alpha), \dots; B_{1K}(t, \alpha), \dots \quad /8/$$

таким чином, щоб вираз /6/, в який замість a і φ підставимо функції часу, що визначаються співвідношеннями /7/, задовольняв вихідне рівняння /1/.

Для однозначності визначення /3/, на функції $u_{1k}(x, \tau, \alpha, \psi_k)$ накладаються додаткові умови відсутності у них головних гармонік [1]

$$\int_0^{2\pi} u_{1k}(x, \tau, \alpha, \psi_k) \cos \psi_k d\psi_k = 0; \int_0^{2\pi} u_{1k}(x, \tau, \alpha, \psi_k) \sin \psi_k d\psi_k = 0. \quad /3/$$

Підставляючи /6/, /7/ у /1/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо

$$\alpha(\tau) \frac{d^2 \varphi_{1k}}{dx^2} + \beta(\tau) \omega_k(\tau) \frac{d \varphi_{2k}}{dx} - \gamma(\tau) \omega_k^2(\tau) \varphi_{1k}(x) = 0,$$

$$\alpha(\tau) \frac{d^2 \varphi_{2k}}{dx^2} + \beta(\tau) \omega_k(\tau) \frac{d \varphi_{1k}}{dx} - \gamma(\tau) \omega_k^2(\tau) \varphi_{2k}(x) = 0. \quad /10/$$

$$\alpha(\tau) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x^2} + \beta(\tau) \omega_k(\tau) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x \partial \psi_k} + \gamma(\tau) \omega_k^2(\tau) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial \psi_k^2} =$$

$$= f_{1k}(\tau, x, \alpha, \psi_k) - \left\{ \beta(\tau) \left[A_{1k} \frac{d \varphi_{1k}}{dx} + \alpha B_{1k} \frac{d \varphi_{2k}}{dx} \right] + \right.$$

$$+ \gamma(\tau) [2 \omega_k(\tau) A_{1k} \varphi_{2k}(x) - 2 \alpha \omega_k(\tau) B_{1k} \varphi_{1k}(x) +$$

$$+ \alpha \frac{d \omega_k}{d \tau} \varphi_{2k}(x)] \} \cos \psi_k - \left\{ \beta(\tau) \left[A_{1k} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x} - \right. \quad /11/$$

$$- \alpha B_{1k} \frac{d \varphi_{1k}}{dx} \right] - \gamma(\tau) [2 \omega_k(x) A_{1k} \varphi_{1k}(x) +$$

$$+ 2 \alpha \omega_k(\tau) B_{1k} \varphi_{2k}(x) + \alpha \frac{d \omega_k}{d \tau} \varphi_{1k}(x)] \} \sin \psi_k,$$

.....

де $f_{1k}(\tau, x, \alpha, \psi_k), \dots$ - коефіцієнти розкладу функції

$\varepsilon F(\tau, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2})$ в асимптотичний ряд вигляду:

$$\varepsilon F(\tau, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}) = \varepsilon f_{1k}(\tau, x, \alpha, \psi_k) + \varepsilon^2 \dots \quad /12/$$

Розв'язуючи систему звичайних диференціальних рівнянь /10/ з врахуванням межових умов конкретної задачі, знаходимо функції

$$\varphi_{1k}(x), \varphi_{2k}(x) \text{ і } \omega_k(\tau).$$

Використовуючи, для нульових початкових умов маємо

$$Y_{1k}(x) = \sin k\pi \frac{x}{l} \cos \left[k\pi \frac{m+n}{m-n} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]; \quad /13/$$

$$Y_{2k}(x) = \sin k\pi \frac{x}{l} \sin \left[k\pi \frac{m+n}{m-n} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right];$$

$$\omega_k(\tau) = \frac{2k\pi}{(m-n)l}, \quad (k=1, 2, \dots), \quad /14/$$

де l — довжина розглядуваної ділянки коливань;

$$m = \frac{\beta(\tau) + \sqrt{\beta^2(\tau) - 4\alpha(\tau)\delta(\tau)}}{2\alpha(\tau)}, \quad n = \frac{\beta(\tau) - \sqrt{\beta^2(\tau) - 4\alpha(\tau)\delta(\tau)}}{2\alpha(\tau)}.$$

Із неоднорідного диференціального рівняння /II/ знаходимо розв'язок задачі у першому наближенні.

Існує така теорема.

Т е о р е м а . Нехай $u(x, \tau, \alpha, \psi)$ — неперервна разом зі своїми частинними похідними по x і ψ до другого порядку включно 2π -періодична по ψ функція, що задовольняє умови вигляду /9/, а $Y_{1k}(x)$ і $Y_{2k}(x)$ — розв'язки системи /10/. Тоді наявні співвідношення

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left[\alpha(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(\tau) \omega(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \psi} + \delta(\tau) \omega(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right] \left\{ \begin{aligned} &[Y_{1k}(x) \cos \psi + Y_{2k}(x) \sin \psi] \\ &[Y_{1k}(x) \sin \psi - Y_{2k}(x) \cos \psi] \end{aligned} \right\} dx d\psi = 0. \quad /15/$$

Справедливість теореми доводиться легко інтегруванням по частинах.

Використовуючи рівності /15/, з диференціального рівняння /II/ визначаємо $A_{1k}(\tau, \alpha)$ і $B_{1k}(\tau, \alpha)$, що дає змогу перше наближення асимптотичного розв'язку рівняння /I/ записати у вигляді:

$$u_1(x, \tau) = \alpha [Y_1(x) \cos \psi + Y_2(x) \sin \psi], \quad /16/$$

де амплітуда α і фаза ψ визначаються з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{M(\tau)\varphi_1(\tau, \alpha) + N(\tau)[\varphi_2(\tau, \alpha) + \alpha \frac{d\psi}{d\tau} \rho(\tau)]}{M^2(\tau) + N^2(\tau)}, \quad /17/$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \epsilon \frac{N(\tau)\varphi_1(\tau, \alpha) - M(\tau)[\varphi_2(\tau, \alpha) + \alpha \frac{d\varphi_2}{d\alpha} P(\tau)]}{\alpha [M^2(\tau) + N^2(\tau)]},$$

в яких

$$M(\tau) = \beta(\tau) \int_0^l \left[\frac{d\psi}{dx} \gamma_1(x) + \gamma_2(x) \frac{d\psi}{dx} \right] dx,$$

$$N(\tau) = \beta(\tau) \int_0^l \left[\gamma_1(x) \frac{d\psi}{dx} - \gamma_2(x) \frac{d\psi}{dx} \right] dx - 2\omega(\tau)P(\tau),$$

$$P(\tau) = \gamma(\tau) \int_0^l [\gamma_1^2(x) + \gamma_2^2(x)] dx;$$

$$\varphi_1(\tau, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_1(\tau, x, \alpha, \varphi) [\gamma_1(x) \cos \varphi + \gamma_2(x) \sin \varphi] dx d\varphi;$$

$$\varphi_2(\tau, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_2(\tau, x, \alpha, \varphi) [\gamma_1(x) \sin \varphi - \gamma_2(x) \cos \varphi] dx d\varphi.$$

У формулах /16/, /17/ і далі індекс κ опускаємо. Можна показати, що для нульових межових умов $M(\tau) = 0$ і система диференціальних рівнянь /17/ набуде більш простого вигляду.

Відзначимо, що побудову вищих наближень, які значно ускладнюють розрахунок, можна вважати недоцільною, оскільки результати [8, 9] свідчать про високу точність першого наближення.

П р и к л а д . Розглянемо вільні нелінійні коливання струни, що рухається зі сталою швидкістю V_0 у поздовжньому напрямку [4].

Коефіцієнти рівняння /1/ у цьому випадку матимуть вигляд /4/, а функція

$$\epsilon F(\tau, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad /18/$$

де $\epsilon = \frac{\delta}{2\rho} (T_0 - \epsilon A_0)$; A_0 - площа поперечного перерізу струни.

Для нульових межових умов зі співвідношення /17/ з врахуванням /13, /14/ і /18/ отримуємо

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \Delta\omega(\alpha), \quad /19/$$

де ω - власна частота лінійних коливань рухомої струни, що визначається формулою /14/.

$$\Delta \omega(\alpha) = \frac{\partial \omega(\epsilon, \eta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{12B \left(\frac{1}{2} B(\epsilon) + L(\epsilon) + \omega(\epsilon) \right)}$$

$$= \left[-\alpha^2 \delta l (-C^2 + 6C^2 D - 8C^2 D^2 - 2CD^2 - D^4) + \frac{4\sqrt{2}l(m-n)^2 (BC^4}{8K} + \frac{D^4}{n(3n+m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2C^2 D}{(2m+n)(n+m)} + \frac{2C^2 D^2 (m-n)}{(3n+m)(2m+n)(m+n)} - \frac{4CD^3}{(m+n)(2m+n)} \right],$$

$$B = \frac{Kk(m+n)}{m-n}; \quad C = A + \frac{q}{l}; \quad D = A - \frac{q}{l}; \quad A = \frac{Kk}{l};$$

$$\Delta = \frac{l}{2} - \frac{1}{2}q; \quad \beta = -2\frac{1}{2}q; \quad \gamma = -1.$$

Як і слід було чекати, амплітуда коливань стала, оскільки ми розглядаємо геометричну нелінійність.

З другої рівності /19/ запишемо вираз для власної частоти нелінійних коливань у першому наближенні:

$$\omega_f(\alpha) = \omega + \Delta \omega(\alpha). \quad /20/$$

Використовуючи формулу /20/, можна дослідити вплив сталої жорсткості руху на частоти власних нелінійних коливань струни.

Викладена методика дослідження значно ефективніша ніж методика праці [4].

Список літератури: 1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Д.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974, 501 с. 2. Калиняк Н.И., Барвинский А.Ф. Нелинейные продольные колебания подвижного стержня с учетом несовершенной упругости материала. - Вестн. Львов. политех. ин-та, Доклады и научные сообщения, 1976, № 6. 3. Митропольский Д.А., Мосеев Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. - Киев: Вища школа. Изд-во Киев. ун-та, 1976. 4. Монт М. О нелинейных колебаниях струны, движущейся в продольном направлении. - Прикладная механика, 1966, т.33, № 2. 5. Покоренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. - К.: Наукова думка, 1970. 6. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. - М.: Высшая школа, 1973. 7. Соболев С.Д. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.

8. Т а р м е н , М о у т Мл. Свободные периодические нелинейные колебания полос, движущейся в осевом направлении. - Прикладная механика, 1969, т.36, № I. 9. *Sketch R. Vebel die Bewegung eines gespannten Fadens. - Annalen der Physik und Chemie, 1897, vol 61.*

Стаття надійшла в редакцію 20.12.1979 р.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін, Р.М.Пасічник, Т.Т.Романик
ПРО НАБЛИЖЕННИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ ДВОМІРНИХ
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ

Визначення електростатичного поля, створеного у просторі зарядженими поверхнями складної конфігурації, зводиться до знаходження розподілу по них зарядів. Остання задача, як відомо [3], формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \sigma^*(q)/R(M, q) dS_q = U^*(M), \quad /I/$$

де $\sigma^*(q)$ - шукана густина розподілу заряду по поверхні S ; $R(M, q)$ - відстань між точкою інтегрування та деякою контрольною точкою $M \in S$; $U^*(M)$ - заданий потенціал на S . У випадку декількох заряджених поверхонь інтеграл в /I/ вважається сумою інтегралів по відповідних поверхнях.

Розглянемо випадок, коли зарядженою поверхнею є частина бічної поверхні еліптичного циліндра, розташованого довільним чином у просторі. Параметричне зображення цієї поверхні відоме і має такий вигляд:

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cos u \cos v - b \sin u \cos v \sin \gamma + v \sin \gamma \sin \gamma + x^*, \\ y(u, v) = a \cos u \sin v + b \sin u \cos v \cos \gamma - v \sin \gamma \cos \gamma + y^*, \\ z(u, v) = b \sin u \sin v + v \cos \gamma + z^*, \\ (u, v) \in \Delta = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2], \end{cases} \quad /2/$$

де β і γ - кути повороту локальної системи координат, зв'язаної з циліндром, відносно основної XYZ ; x^*, y^*, z^* - координати початку локальної системи.

Враховуючи /2/, перетворимо /1/ до вигляду

$$\iint_{\Delta} G(u, v) Q^{(0)}(u, v) du dv = U(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in \Delta, \quad /3/$$

де

$$Q^{(0)}(u, v) = \rho(u) [(u - u_0)^2 T(u, u_0) + (v - v_0)^2]^{-1/2}, \quad /4/$$

причому

$$\rho(u) = (\alpha^2 \sin^2 u + \beta^2 \cos^2 u)^{1/2},$$

$$T(u, u_0) = \frac{5(\pi^2 - \frac{u - u_0}{2})}{(\frac{u - u_0}{2})^2} \times [\alpha^2 \sin^2 \frac{u + u_0}{2} + \beta^2 \cos^2 \frac{u + u_0}{2}].$$

Двомірне рівняння /3/ - першого роду, тому для його наближеного розв'язку можна використати метод регуляризації [2], чисельна реалізація якого в загальному випадку пов'язана з певними обчислювальними труднощами. Наявність зосередженої особливості в ядрі рівняння /3/, а також апріорна інформація про характер поведінки шуканої функції дають змогу скористатися більш простим методом саморегуляризації [1]. Таким чином, властивість ядра, а також апріорне припущення про те, що функція

$$\Omega(u, v) G(u, v) = G(u, v) (u - u_1)^{n_1} (u_2 - u)^{n_2} (v - v_1)^{m_1} (v_2 - v)^{m_2}, \quad /5/$$

$$0 < n_1, n_2, m_1, m_2 \leq 0,5$$

мало змінюється в області $S_0 = \{(u, v) : |u - u_0| \leq \Delta_1, |v - v_0| \leq \Delta_2\}$ при достатньо малих Δ_1 і Δ_2 , дає змогу перетворити /3/ до рівняння другого роду.

Запишемо ядро інтегрального рівняння /3/ у вигляді суми

$$Q^{(0)}(u, v) = N(u, v) + G(u, v), \quad /6/$$

де

$$N(u, v) = \begin{cases} \frac{P(u)(\Delta_1 - |u - u_0|)(\Delta_2 - |v - v_0|)}{\Delta_1 \Delta_2 \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}}, & (u, v) \in S_0 \\ 0, & (u, v) \notin S_0 \end{cases}$$

$$G(u, v) = \begin{cases} \frac{P(u)(\Delta_1 - |v - v_0| + \Delta_2 - |u - u_0| - |u - u_0| |v - v_0|)}{\Delta_1 \Delta_2 \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}}, & (u, v) \in S_0 \\ \frac{1}{\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}}, & (u, v) \notin S_0 \end{cases}$$

Підставляючи /6/ у /3/ і враховуючи /5/, отримуємо

$$\Theta(u_0, v_0) = \Theta(u_0, v_0) L(u_0, v_0) + \iint_{\Delta} \Theta(u, v) \Theta(u, v) du dv - \Theta(u_0, v_0), \quad /7/$$

де

$$L(u_0, v_0) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \iint_{S_0} \frac{P(u)(\Delta_1 - |u - u_0|)(\Delta_2 - |v - v_0|)}{\Omega(u, v) \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}} du dv. \quad /8/$$

Отже, маємо рівняння другого роду. При обчисленні інтеграла /8/ виникають труднощі, пов'язані з особливостями підінтегральної функції у точці (u_0, v_0) , і при наближенні точки інтегрування до межі області Δ . Для послаблення першої з них запишемо /8/ наступним чином:

$$L(u_0, v_0) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Omega(u_0, v_0)} \left\{ \iint_{S_0} \frac{P(u, v)}{\Omega(u, v)} Q^{(0)}(u, v) du dv + \right. \\ \left. + \iint_{S_0} Q^{(0)}(u, v) du dv \right\}, \quad /9/$$

де

$$R(u, v) = (\Delta_1 - |u - u_0|)(\Delta_2 - |v - v_0|) \Omega(u_0, v_0) - \Delta_1 \Delta_2 \Omega(u, v).$$

Коли $u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0$, то вираз $\frac{P(u,v)}{E(u,v)} Q^N(u,v)$ набуває скінченного значення, і для обчислення першого інтеграла в /9/ можна застосувати кубатурні формули. Щоб усунути другу особливість, використовуємо спеціальну заміну змінних.

Другий інтеграл у /9/ перетворимо до такого, що береться аналітично. Для цього від інтегрування по параметру u перейдемо до інтегрування по l , яке інтерпретується як довжина дуги еліпса, що відраховується від деякого початкового положення значення u_{00} . Нехай l_0 - довжина дуги, що визначається u_0 . Добре видно, що у термінах l

$$P(u) du = dl,$$

а для $(u,v) \in S_0$ $(u-u_0)^2 T(u,u_0) + (v-v_0)^2 = (l-l_0)^2 + (v-v_0)^2$.

І другий інтеграл у /9/ можна записати як

$$\iint_{l_0-A_2}^{l_0+A_2} \frac{u(l) dv}{[(l-l_0)^2 + (v-v_0)^2]^{1/2}}.$$

Отриманий інтеграл беремо аналітично.

Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду розв'язуємо методом колісації з використанням білінійної апроксимації щільності густини.

Точність отриманого розв'язку оцінюємо апостеріорно. Визначивши густину розподілу зарядів, знаходимо значення потенціалу в точках поверхні, які не збігаються з контрольними. Згідно з принципом екстремума за відхиленням одержаних значень від заданих на поверхні S можна оцінити максимальну похибку розв'язку вихідного інтегрального рівняння.

Описана методика реалізована у вигляді комплексу прикладних програм, записаних алгоритмічною мовою Фортран-IV. Шляхом обчислювального експерименту виявлено, що Δ_1 і Δ_2 є параметрами регуляризації, оптимальний вибір яких суттєво впливає на точність розв'язку задачі.

На закінчення наведемо результати розрахунку поля, утвореного бічним поверхнем круглого циліндра з довжиною твірної l і радіусом 0,15 ($V_1 = -V_2 = 0,5$). Граничне значення на поверхні дорівнює одиниці. Оптимальні значення параметрів $\Delta_1 = 0,27$, $\Delta_2 = 0,04$. Порядок розв'язуваної системи лінійних алгебраїчних рівнянь 64. Оцінка відносна похибка розв'язку не перевищувала 1%. Нижче наводимо значення потенціалу по осі циліндра:

V	потенціал по осі	V	потенціал по осі
0,00	1,000	0,30	0,990
0,05	1,000	0,35	0,979
0,10	0,999	0,40	0,968
0,15	0,999	0,45	0,918
0,20	0,998	0,50	0,855
0,25	0,995		

Список літератури: 1. Дмитрієв В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода. - Вычислительные методы и программирование, 1968, вып. 10. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1974. 3. Тозони О.В., Маергоф И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. - Киев: Техніка, 1974.

Стаття надійшла в редакцію 10.03.1980 р.

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Й.Г.Шмідт

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ШМІДТА

НА ВИПАДОК БІГАРМОНІЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Шмідт [2] дослідив можливість аналітичного продовження гармонічних потенціалів через поверхню шару і довів, що у випадку незамкненої поверхні ці потенціали зображають багатозначні функції, які галузяться біля країв поверхні шару.

Розширимо дослідження Шмідта на випадок бігармонічних потенціалів. Припустимо, що всі розглядувані функції та поверхні аналітичні.

Нехай Σ - аналітична поверхня і M - точка поблизу її. Проведемо через M нормаль до Σ і позначимо через u, v, n відповідно координати основи цієї нормалі на Σ і відстань від M до Σ /довжину відрізка нормалі/. У цій системі координат u, v, n /рівняння Лапласа має вигляд [1]/

$$\Delta W = \Omega \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + D(W), \quad /1/$$

де

$$\Omega = (EG - F^2)(1 - n\kappa_1)^2(1 - n\kappa_2)^2;$$

E, G, F - коефіцієнти першої квадратичної форми; κ_1, κ_2 - головні кривини поверхні Σ ; $D(W)$ - диференціальний вираз, який не містить $\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}$.

Якщо $f_i(u, v)$ ($i = 1, 4$) - аналітичні функції своїх аргументів, то за теоремою Коші-Ковалевської в околі точки $u, v, 0$ існує аналітичний розв'язок рівняння $\Delta \Delta W = 0$, який задовольняє на Σ умови

$$W|_{n=0} = f_1, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{n=0} = f_2, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}|_{n=0} = f_3, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial n^3}|_{n=0} = f_4. \quad /2/$$

Враховуючи формулу /1/, аналогічний висновок можна зробити і відносно існування аналітичного розв'язку задачі

$$\Delta \Delta W = 0, \quad /3/$$

$$W|_{n=0} = f_1, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{n=0} = f_2, \quad \Delta W|_{n=0} = f_3, \quad \frac{\partial \Delta W}{\partial n}|_{n=0} = f_4. \quad /4/$$

Розглянемо тепер бігармонічний потенціал простого шару

$$V(M) = \iint_{\Sigma} v(P) \frac{1}{r} d_p S, \quad /5/$$

де $r = |\vec{MP}|$ - відстань між точками M і $P \in \Sigma$.

Із інтегрального зображення бігармонічних функцій в областях, обмежених поверхнею Σ ,

$$W(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right] d_p S \quad /6/$$

випливає, що $V(M)$ можна розглядати як розв'язок задачі /3/ - /4/ при $f_1 = f_2 = f_3 = 0, f_4 = v(P)$. Тому, якщо $v(P)$ - аналітична функція, то із уже сказаного випливає можливість аналітичного продовження $V(M)$ із області, обмеженої поверхнею Σ , в область D_1 , розташовану зовні Σ , тобто через поверхню Σ . Одержану в результаті такого продовження бігармонічну функцію позначимо як $U(M)$. Тоді, користуючись інтегральним зображенням бігармонічної функції, дістанемо наступне зображення для $V(M)$ в D_1 :

$$V(M) = -4\pi U(M) + \iint_{S_1} \left[U(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U(P)}{\partial n} - \Delta U(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U(P)}{\partial n} \right] d_p S + \iint_{\Sigma \setminus S_1} v(P) \frac{1}{r} d_p S,$$

де $S = S_1 \cup \Sigma$, - границя D_1 .

Можна показати, що продовжене значення $V(M)$ відрізняється від справжнього його значення на функцію $-4\pi U(M)$. Якщо Σ - незамкнена поверхня, тоді з цих результатів випливає багатозначність $V(M)$ у всьому евклідовому просторі, причому лінійне галушення $V(M)$ є крива, що обмежує Σ .

Аналогічні міркування можна провести і для інших бігармонічних потенціалів.

Список літератури: І. Ковалевська С. Об одной теории Брунса. - В кн.: Научные работы. М., 1948. 2. Schmidt E. *Math. Annalen*, 1910, v. 68.

Стаття надійшла в редакцію 19.03.1979 р.

УДК 517.949.8

В.А.Бакалець, Н.Б.Коваль

МЕТОД НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Метод, запропонований у праці [1], поширюємо на розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння на площині у випадку замкнених гладких кривих другого порядку, коли правою частиною рівняння є алгебраїчний поліном довільного степеня. На мові Фортран-IV для ЕСМ ЕС-1022 складена підпрограма, яка реалізує цей метод.

Розглянемо граничну задачу для бігармонічного рівняння

$$\Delta\{u\} = P_n(x, y), \quad /1/$$

$$u|_S = 0, \quad /2/$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0, \quad /3/$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $P_n(x, y)$ - алгебраїчний поліном степеня n вигляду

$$P_n(x, y) = \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

S - замкнута гладка крива другого порядку, задана рівнянням

$$\omega(x, y) = 0.$$

Розв'язок задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \omega^2(x, y) \cdot \tilde{P}_n(x, y), \quad /4/$$

де $\tilde{P}_n(x, y)$ - алгебраїчний поліном степеня n з невідомими коефі-

цієнтами $\bar{a}_{ij}$.

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \bar{a}_{ij} x^i y^j.$$

Підставимо /4/ у /1/ і отримаємо тотожність

$$L[u_n(x, y)] = P_n(x, y), \quad /5/$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x та y , одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{a}_{ij}$.

Розв'язок задачі /1/ - /3/, зображений у вигляді /4/ з визначеними коефіцієнтами $\bar{a}_{ij}$, буде задовольняти як рівняння /1/, так і граничні умови /2/ - /3/.

Розглянемо конкретний випадок. Нехай S - еліпс, заданий рівнянням $\omega(x, y) = \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$. Тоді

$$u_n(x, y) = (\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - \alpha^2 \beta^2)^2 \cdot \bar{P}_n(x, y),$$

а систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержану з /5/, запишемо так:

$$\begin{aligned} & [\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\beta^4 + 4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)\alpha^2\beta^2 + \\ & + \gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\alpha^4] \bar{a}_{ij} + [2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\alpha^2\beta^4 + \\ & + 2\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)\alpha^4] \bar{a}_{i+2, j-2} + \\ & + [2\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)\beta^4 + \\ & + 2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\alpha^2\beta^2] \bar{a}_{i-2, j+2} + \\ & + \alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\alpha^4 \bar{a}_{i+4, j-4} + \\ & + \gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\beta^4 \bar{a}_{i-4, j+4} + \\ & + \alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\alpha^4\beta^4 \bar{a}_{i+4, j} + \\ & + \gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\alpha^4\beta^4 \bar{a}_{i, j+4} + \\ & - 2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\alpha^4\beta^2 \bar{a}_{i+4, j-2} - \\ & - [2\alpha(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\alpha^2\beta^4 + 4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)\alpha^4\beta^2] \bar{a}_{i+2, j} - \\ & - [4\beta(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)\alpha^2\beta^4 + 2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\alpha^4\beta^2] \bar{a}_{i, j+2} - \\ & - 2\gamma(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\alpha^2\beta^4 \bar{a}_{i-2, j+4} = a_{ij}, \quad 0 \leq i+j \leq n. \end{aligned} \quad /6/$$

Визначення α_{ij} для деяких n :

$$n=0, \quad \bar{\alpha}_{00} = \frac{\alpha_{00}}{24\alpha^2\beta^2 + 16\beta\alpha^2\delta^2 + 24\gamma\alpha^4};$$

$$n=1, \quad \bar{\alpha}_{00} = \frac{\alpha_{00}}{24\alpha^2\beta^2 + 16\beta\alpha^2\delta^2 + 24\gamma\alpha^4},$$

$$\bar{\alpha}_{01} = \frac{\alpha_{01}}{24\alpha^2\beta^2 + 48\beta\alpha^2\delta^2 + 120\gamma\alpha^4},$$

$$\bar{\alpha}_{10} = \frac{\alpha_{10}}{120\alpha^2\beta^2 + 48\beta\alpha^2\delta^2 + 24\gamma\alpha^4}.$$

і відповідні розв'язки /4/

$$u_0 = \bar{\alpha}_{00} \omega^2(x, y),$$

$$u_1 = (\bar{\alpha}_{00} + \bar{\alpha}_{01}y + \bar{\alpha}_{10}x) \omega^2(x, y).$$

Розмірність m матриці системи /6/ і степінь многочлена n правої частини /1/ зв'язані співвідношенням

$$m = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

звідки видно, що навіть при невеликих n порядок системи досить великий. Отже, знаходження розв'язків цієї системи при збільшенні степеня многочлена $P_n(x, y)$ процес досить громіздкий.

Тому одержання матриці системи /6/, а також знаходження розв'язку задачі /1/ - /3/ реалізовано на мові Фортран-IV для ЕСМ 6С-1022 у вигляді підпрограми

DREAM(N, A, B, ALFA, BETA, GAMMA, IV) ;

де N - степінь многочлена; A, B - півосі еліпса; $ALFA, BETA, GAMMA$ - коефіцієнти оператора L ; IV - параметр виводу на друк інформації про роботу *DREAM* . Якщо $IV = 1$, то видруковується повна інформація про роботу *DREAM* , коли $IV = 2$ - друку немає.

Складена підпрограма обчислює вектор $\{REZ_i\}$, $i = 1, \overline{N \times Y}$ - значення розв'язків задачі /1/ - /3/ у точках (x_i, y_i) , $i = 1, \overline{N \times Y}$, коли правою частиною рівняння є многочлен степеня K ($K \leq 15$) , а кривою S - еліпс з півосями C, D , розміщений у початку координат.

Масиви $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_i\}_{i=1}^N$, $\{u_i\}_{i=1}^N$, $\{v_i\}_{i=1}^N$
 замовник повинен сформувати в основній програмі і описати оператором
COMMON /DREAM/ V(100), X(500), Y(500), REZ(500), NXY.

Розв'язок системи обчислює **SUBROUTINE DELG** методом Гаусса з вибором головного елемента.

П р и к л а д . Розглянемо граничну задачу

$$\Delta u = -2x^2 + 3xy + y^2 + 5x - 6y + 0.2,$$

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0.$$

де S - єдине з півосями $A = 1$, $B = 0.5$.

В основній програмі сформовано масиви

$\{a_{ij}\} = \{-2.0, 3.0, 1.0, 5.0, -6.0, 0.2\}$; $\{x_i\}$, $\{y_i\}$. При звертанні до підпрограми **CALL DREAM (2,1,0.5,1,1,1)** отримаємо значення розв'язку в точках (x_i, y_i) :

x_i	y_i	REZ_i
-0.100000E 01	0.0	0.0
-0.800000E 00	0.0	0.6284364E-03
-0.600000E 00	0.0	0.1634532E-02
-0.400000E 00	0.0	0.2093402E-02
-0.200000E 00	0.0	0.1638509E-02
-0.5960464-E-07	0.0	0.4237290E-03
0.1999999E 00	0.0	-0.1009764E-02
0.3999999E 00	0.0	-0.1961767E-02
0.5999999E 00	0.0	-0.1896500E-02
0.7999999E 00	0.0	-0.8612182E-03
0.9999999E 00	0.0	-0.5016707E-15

Відзначимо, що вимога нульових граничних умов для задачі /1/ - /3/ не зменшує її загальності. Наприклад, розглянемо задачу

$$\Delta^2 u = P_n(x, y),$$

$$u|_S = p_m(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = q_m(x, y).$$

У цьому випадку будемо таку довільну функцію $v(x, y)$, що

$$v(x, y)|_S = p_m(x, y).$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} \Big|_s = q_m(x,y).$$

Зробивши заміну $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$, для $w(x,y)$ дістаємо задачу

$$\Delta^2 w = P_n(x,y),$$

$$w|_s = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_s = 0,$$

причому $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$.

Аналогічно не зменшує загальності вимога, щоб центр межі області знаходився у початку координат, що досягається відповідною заміною змінних. Якщо права частина бігармонічного рівняння – довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити алгебраїчним многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв'язком і отриманим нами, за теоремою Вейерштрасса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x,y)$.

Список літератури: 1. Бакалець В.А., Ілджєвич Й.В. Метод неовзначених коефіцієнтів розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, № 15.
2. Канторович Л.Б., Крилов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962.

Стаття надійшла в редакцію 15.10.1979 р.

УДК 519.21

І.Д.Квіт

МАКСИМАЛЬНА ВЛАСТИВІСТЬ ВІТРОПІІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛА

У праці [1] розглянуто фізичні основи узагальненого розподілу Вейбула з густиною розподілу ймовірностей

$$w(t; \alpha, \beta, \lambda, \rho) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^{\beta} \Gamma(\rho)} e^{-\alpha t^{\beta}} t^{\rho-1}, t > 0, (\alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \rho > 0). \quad /1/$$

Ентропія розподілу [2] в густині $w(t)$ дорівнює

$$\int_0^{\infty} w(t; \alpha, \beta, \alpha, \beta) \log_2 w(t; \alpha, \beta, \alpha, \beta) dt = \log_2 \frac{\alpha \Gamma(\beta) e^{\beta + (\frac{1}{\beta} - \beta) \psi(\beta)}}{\beta \alpha^{\frac{1}{\beta}}}, \quad /2/$$

де $\psi(\beta) = \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}$ — логарифмічна похідна гамма функції.

Т е о р е м а . Зі всіх абсолютно неперервних розподілів, заданих на додатній частині дійсної осі, що мають однакові початкові моменти порядку $\beta > 0$ та однакові перші логарифмічні моменти, узагальнений розподіл Вейбула має найбільшу ентропію.

Справді, нехай абсолютно неперервна випадкова змінна з густиною $f(t)$, $t > 0$ має початковий момент порядку $\beta > 0$

$$\int_0^{\infty} t^{\beta} f(t) dt = \int_0^{\infty} t^{\beta} w(t; \alpha, \beta, \alpha, \beta) dt = \frac{\beta}{\alpha} \alpha^{\beta} \quad /3/$$

та перший логарифмічний момент

$$\int_0^{\infty} f(t) \ln t dt = \int_0^{\infty} w(t; \alpha, \beta, \alpha, \beta) \ln t dt = \ln \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{\psi(\beta)}{\beta} \quad /4/$$

Тоді, використовуючи інтеграл

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-qx} \ln x dx = \frac{1}{q^p} \Gamma(p) [\psi(p) - \ln q], \quad (p > 0, q > 0), \quad /5/$$

де

$$\psi(1) = -C; \quad C = 0,5772157; \quad \psi(n) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}, \quad (n = 2, 3, \dots);$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C - 2 \ln 2 = -\ln(4e^C) = -1,9635100269\dots; \quad /6/$$

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\ln(4e^C) + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right), \quad (n = 1, 2, \dots);$$

C — стала Ейлера [3], та умови /3/ і /4/, приходимо до висновку,

$$-\int_0^{\infty} f(t) \log_2 w(t; \alpha, \beta, \alpha, \beta) dt = \log_2 \frac{\alpha \Gamma(\beta) e^{\beta + (\frac{1}{\beta} - \beta) \psi(\beta)}}{\beta \alpha^{\frac{1}{\beta}}} \quad /7/$$

Отже, різниця

$$-\int_0^{\infty} f(t) \log_2 f(t) dt - \log_2 \frac{\alpha \Gamma(\beta) e^{\beta + (\frac{1}{\beta} - \beta) \psi(\beta)}}{\beta \alpha^{\frac{1}{\beta}}} \quad /8/$$

враховуючи /7/, записуємо як

$$\int_0^{\infty} f(t) \log_2 \frac{w(t; \alpha, \delta, \alpha, \beta)}{f(t)} dt. \quad /9/$$

За нерівністю Остроградського

$$\log_2 x \leq (x-1) \log_2 e, \quad x > 0$$

для виразу /9/ дістаємо нерівність

$$\int_0^{\infty} f(t) \log_2 \frac{w(t; \alpha, \delta, \alpha, \beta)}{f(t)} dt \leq \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{w(t; \alpha, \delta, \alpha, \beta)}{f(t)} - 1 \right] (\log_2 e) dt = 0. \quad /10/$$

Оскільки вираз зліва у нерівності /10/ дорівнює різниці /8/, то одержуємо нерівність

$$-\int_0^{\infty} f(t) \log_2 f(t) dt \leq \log_2 \frac{\alpha \Gamma(\beta) e^{\beta + (\frac{1}{\delta} - \beta) \psi(\beta)}}{\beta \delta^{\frac{1}{\delta}}}, \quad /11/$$

що є змістом теореми.

Відзначимо, що узагальнений розподіл Вейбула включає такі розподіли як експонентний, хі-квадрат, Ерланга, гамма, Маквелла, Релєя та Вейбула. Запишемо густини й ентропії цих розподілів:

Розподіл	Густина	Ентропія
Експонентний	$w(t; 1, 1, \alpha, 1), (\alpha > 0)$	$\log_2 \frac{e}{\alpha}$
Хі-квадрат	$w(t; 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}), (n=1, 2, \dots)$	$\log_2 [2\Gamma(\frac{n}{2}) e^{\frac{n}{2}} + (1 - \frac{n}{2}) \psi(\frac{n}{2})]$
Ерланга	$w(t; 1, 1, \alpha, N), (\alpha > 0; N=2, 3, \dots)$	$\log_2 [\frac{\Gamma(N)}{\alpha^N} e^{N + (N-1) \psi(N)}]$
Гамма	$w(t; 1, 1, \alpha, \beta), (\alpha > 0, \beta > 0)$	$\log_2 [\frac{\Gamma(\beta)}{\alpha^\beta} e^{\beta + (1-\beta) \psi(\beta)}]$
Максвелла	$w(t; 1, 2, \alpha, \frac{3}{2}), (\alpha > 0)$	$\log_2 (e^6 \sqrt{\frac{\pi}{e \alpha}})$
Релєя	$w(t; 6\sqrt{2}, 2, 1, 1), (6 > 0)$	$\log_2 (\frac{6}{\sqrt{2}} e^{1 + \frac{6}{2}})$
Вейбула	$w(t; \alpha, \delta, 1, 1), (\alpha > 0, \delta > 0)$	$\log_2 (\frac{\alpha}{\delta} e^{1 + (1-\frac{1}{\delta}) \psi(\frac{1}{\delta})})$

Очевидно, що для кожного з сімох розподілів теорема відповідно уточнюється.

П р и к л а д . Перевірити, що коли логарифмічно нормальний розподіл має початковий момент порядку $\delta > 0$ і перший логарифмічний

момент такі самі як для розподілу Вейбула, то ентропія розподілу Вейбула більша від ентропії логарифмічно нормального розподілу.

Справді, логарифмічно нормальний розподіл з густиною

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0, (\sigma > 0)$$

має початковий момент порядку $\delta > 0$

$$\int_0^\infty t^\delta f(t) dt = e^{-\mu\delta + \frac{1}{2}\sigma^2\delta^2},$$

перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty f(t) \ln t dt = \mu$$

і ентропію

$$\int_0^\infty f(t) \log_2 f(t) dt = \log_2 (\sigma\sqrt{2\pi} e e^{-\mu}).$$

Розподіл Вейбула з густиною

$$w(t; \alpha, \beta, 1, 1) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} t^{\beta-1}, \quad t > 0, (\alpha > 0, \beta > 0)$$

має початковий момент порядку $\delta > 0$

$$\int_0^\infty t^\delta w(t; \alpha, \beta, 1, 1) dt = \alpha^\delta,$$

перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty w(t; \alpha, \beta, 1, 1) \ln t dt = \ln(\alpha e^{-\frac{\beta}{\delta}})$$

і ентропію

$$-\int_0^\infty w(t; \alpha, \beta, 1, 1) \log_2 w(t; \alpha, \beta, 1, 1) dt = \log_2 \left(\frac{\beta}{\alpha} e^{\beta \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)} \right). \quad (12)$$

За умовою відповідні моменти однакові

$$e^{-\mu\delta + \frac{1}{2}\sigma^2\delta^2} = \alpha^\delta, \quad \mu = \ln(\alpha e^{-\frac{\beta}{\delta}}).$$

Звідси

$$\mu = \ln(\alpha e^{-\frac{\beta}{\delta}}), \quad \sigma^2 = \frac{2\beta}{\delta^2}.$$

При цих значеннях параметрів ентропія логарифмічно нормального розподілу перевищує

$$\log_2 \left(\frac{2\beta\sqrt{\beta\pi}}{\delta} e^{-\frac{\beta}{\delta}} \right)$$

і є меншою від ентропії /12/ розподілу Вейбула, оскільки

$$2\sqrt{E\kappa} = 2,69... < e^{0,45} = 2,93...$$

Зауважимо, що з нерівностей для ентропій можна дістати багато цікавих нерівностей для функцій. Наприклад, якщо порівнювати ентропії логнормального розподілу з ентропією узагальненого розподілу Вейбула при однакових початковому моменті порядку $\delta > 0$ та першому логарифмічному моменті, то з умови додатності дисперсії одержимо нерівність $\psi(x) < \ln x$, $x > 0$.

Список літератури: І. К в і т І.Д., М о с к в я к Є.В. Розподіли деяких процесів руйнування. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 15. 2. К в і т І.Д. Ентропія розподілів. Вид-во Львів. ун-ту, 1971. 3. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 18.12.1979 р.

УДК 539.3

І.А.Прокопів, Д.Г.Хлебніков

НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В ЕКРАНОМУ ВУЗЛІ КІНЕСКОПА З ПЛОСКИМ ЕКРАНОМ

Екранний вузол кінескопа розглядається як трипластинчаста система, що знаходиться під дією зовнішнього тиску інтенсивності p і заданого температурного поля, симетричного відносно площини $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{b}{2}$ /рис.1/.

З огляду на симетрію обмежимося розглядом пластинок 1 і 2, серединні площини яких займають відповідно області $0 \leq x \leq a$, $y_2 = 0$, $0 \leq y_1 \leq b$ і $0 \leq x \leq a$, $y_1 = 0$, $0 \leq y_2 \leq c$.

Прогини пластинок w_1 і w_2 задовольняють рівняння [1, 2]

$$\Delta_{x_1 x_1}^2 w_i = \frac{p}{D_i} - 2(1+\nu) \Delta_{x_1 x_1} T_i, \quad i=1,2, \quad /1/$$

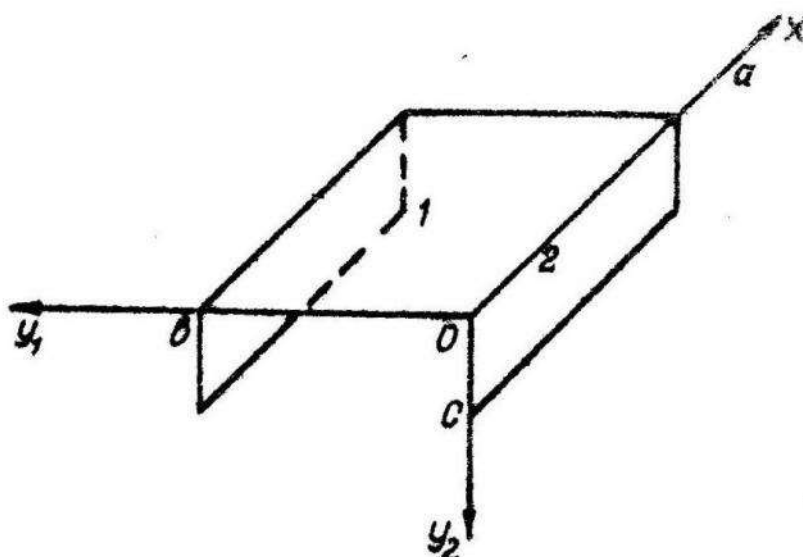


Рис. I.

умови симетрії:

$$w_1(x, y_1) = w_1(a-x, y_1) = w_1(x, b-y_1), w_2(x, y_2) = w_2(a-x, y_2), \quad /2/$$

шарнірного опирання при $x=0, x=a$

$$w_1(0, y_1) = w_1(a, y_1) = 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(0, y_1) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(a, y_1) = \alpha(1+\nu)\tau_1(0, y_1); \quad /3/$$

пружного защемлення при $y_2=c$

$$w_2(x, c) = \kappa c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2 \partial y_2}(x, c) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}(x, c) + \alpha(1+\nu) \frac{\partial \tau_2}{\partial y_2}(x, c) \right], \quad /4/$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y_2}(x, c) = -\kappa c \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}(x, c) + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x, c) + \alpha(1+\nu) \tau_2(x, c) \right];$$

рівності кутів повороту та згинних моментів при $y_1=0, y_2=0$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1}(x, 0) = -\frac{\partial w_2}{\partial y_2}(x, 0),$$

$$D_1 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}(x, 0) + \alpha(1+\nu) \tau_1(x, 0) \right] = D_2 \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}(x, 0) + \alpha(1+\nu) \tau_2(x, 0) \right]. \quad /5/$$

Похтуючи впливом поєдворжніх переміщень на напруження, введемо

ліній в'єднання пластинок $y_1 = 0$, $y_2 = a$ нерухомою

$$w_1(x, 0) = w_2(x, 0) = 0.$$

/6/

У формулах /1/ - /6/ позначено:

$$\Delta_{\kappa\kappa} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}, \quad \tau_i = \frac{12}{h_i^3} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \tau_i y_{i-1} dy_{i-1}, \quad D_i = \frac{E h_i^3}{12(1-\nu^2)},$$

$\tau_i = \tau_i(x, y, y_1)$ - температура в області i -ї пластинки; h_i - товщина i -ї пластинки; E, ν - пружні характеристики матеріалу пластинок; α - коефіцієнт лінійного розширення; κ, κ - безрозмірні коефіцієнти, які характеризують пружність заземлення нижнього краю поясу в напрямі прогину та повороту.

Розв'язки рівнянь /1/ при $\rho = 0$, що задовольняють умови /2/, /3/, візьмемо у вигляді рядів Фур'є:

$$w_1(x, y_1) = \frac{1+\nu}{D_1} \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[A_m \operatorname{ch} \lambda_m (y_1 - \frac{a}{2}) + B_m \lambda_m (y_1 - \frac{a}{2}) \operatorname{sh} \lambda_m (y_1 - \frac{a}{2}) + \varphi_{1m}(y_1) \right] \sin \lambda_m x + \psi_1(x, y_1) \right\},$$

$$w_2(x, y_2) = \frac{1+\nu}{D_2} \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[A'_m \operatorname{ch} \lambda_m y_2 + B'_m \lambda_m y_2 \operatorname{sh} \lambda_m y_2 + C'_m \operatorname{sh} \lambda_m y_2 + D'_m \lambda_m y_2 \operatorname{ch} \lambda_m y_2 + \varphi_{2m}(y_2) \right] \sin \lambda_m x + \psi_2(x, y_2) \right\},$$

/7/

де

$$\varphi_{im}(u) = \frac{1}{\alpha \lambda_m} \int_{\beta_1}^u [\lambda_m(u-\tau) \operatorname{ch} \lambda_m(u-\tau) - \operatorname{sh} \lambda_m(u-\tau)] d\tau \int_0^a [\Delta_{12}^2 \tau_i(\tau, \tau) - \alpha D_i \Delta_{12} \tau_i(\tau, \tau)] \sin \lambda_m \tau d\tau, \quad \beta_1 = \frac{a}{2}, \quad \beta_2 = 0;$$

$$\psi_i(\tau, \xi) = \alpha D_i \frac{\tau^2(u-\xi)^2}{2a^2} \tau_i(\tau, \xi), \quad i = 1, 2; \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a};$$

$\lambda_m, \delta_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$ - певні коефіцієнти, які знаходимо з умов /4/ - /6/. З першої умови /6/ одержуємо

$$A'_m = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \psi_2(\tau, 0) \sin \lambda_m \tau d\tau.$$

Інші умови дають систему п'яти лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої збігається з матрицею системи /10/ праці [3].

Праві частини системи рівнянь R_{im} ($i=1, \dots, 5$) мають такий вигляд:

$$R_{1m} = \frac{1}{2\lambda_m^2} \left\{ \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{\alpha} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y_1^2}(\tau, 0) - \alpha D_1 \tau_1(\tau, 0) \right] \sin \lambda_m \tau d\tau - \frac{\alpha^2 \varphi_{1m}}{\alpha y_1^2}(0) \right\} + \frac{1}{2} (A'_m - R_{2m}), \quad /8/$$

$$R_{2m} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \psi_1(\tau, 0) \sin \lambda_m \tau d\tau - \varphi_{1m}(0),$$

$$R_{3m} = \frac{1}{\lambda_m} \left[\frac{2}{\alpha} h_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_1^2} \int_0^{\alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(\tau, 0) \sin \lambda_m \tau d\tau - \frac{\alpha \varphi_{1m}}{\alpha y_1}(0) \right],$$

$$R_{4m} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \left\{ \psi_2(\tau, c) + \kappa c^2 \left[(\nu - 2) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2 \partial y_2}(\tau, c) - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y_2^2}(\tau, c) + \alpha D_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial y_2}(\tau, c) \right] \right\} \sin \lambda_m \tau d\tau - \varphi_{2m}(c) + \kappa c^2 \left[(\nu - 2) \lambda_m^2 \frac{\alpha \varphi_{2m}}{\alpha y_2}(c) + \frac{\alpha^2 \varphi_{2m}}{\alpha y_2^2}(c) \right] - \lambda'_m \left[c h \lambda_m c + (1 - \nu) \kappa c^2 \lambda_m^2 \operatorname{sh} \lambda_m c \right],$$

$$R_{5m} = \frac{2}{\alpha \lambda_m} \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(\tau, c) + \alpha c \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y_2^2}(\tau, c) + \nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}(\tau, c) - \alpha D_2 \tau_2(\tau, c) \right] \right\} \sin \lambda_m \tau d\tau - \frac{1}{\lambda_m} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial y_2}(c) + \right.$$

$$= \alpha c \left[\frac{\partial^2 \varphi_{2m}}{\partial y_2^2} (c) - \nu \lambda_m^2 \varphi_{2m}(c) \right] - \lambda_m^2 \left[s \lambda_m c + (1-\nu) \alpha c \lambda_m c \lambda_m c \right].$$

Розрахунки показали, що у випадку лінійного розподілу температури по товщині пластинок з перепадами $\Delta t_i = h_i \tau_i$ ($i=1, 2$) максимальні розтягуючі напруження на поверхні конструкції у площинах перпендикулярних осям OY_1 і OY_2 , досягаються у точках $x = \frac{a}{2}, y_1 = \frac{h_2}{2}, y_2 = 0$; $x = \frac{a}{2}, y_1 = 0, y_2 = \frac{h_1}{2}$ при додатних перепадах температури і в точці $x = \frac{a}{2}, y_1 = \frac{c}{2}, y_2 = 0$ — при від'ємних. Оскільки у перших точках досягають максимуму також напруження, зумовлені атмосферним тиском [3], то ймовірність руйнування приладів при охолодженні /перепад температури додатний/ значно вища, ніж при нагріванні.

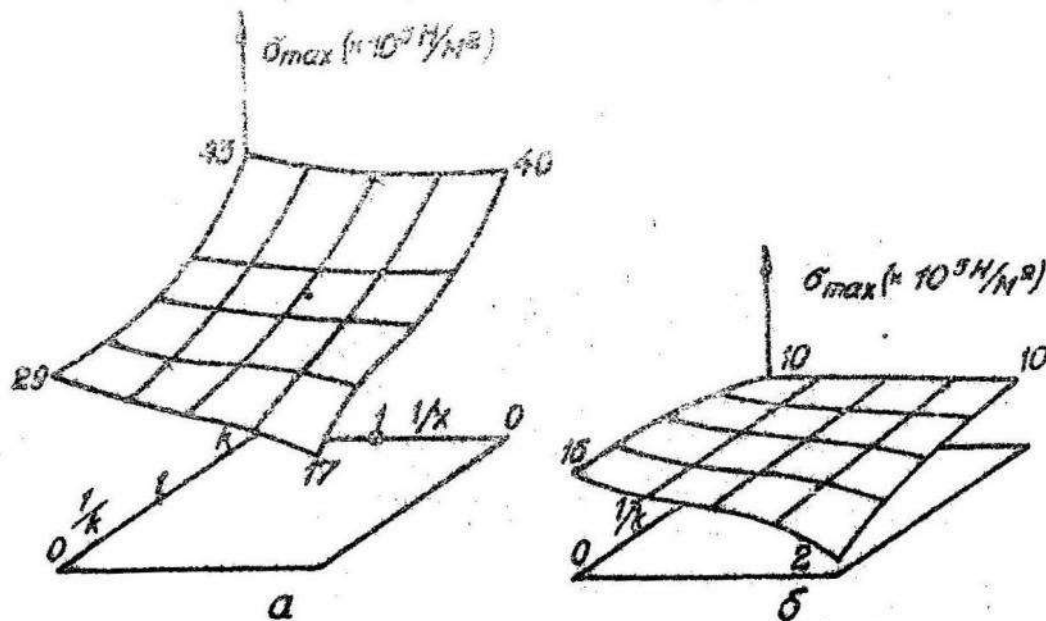


Рис. 2.

На рис. 2 показано графіки максимальних розтягуючих напружень залежно від коефіцієнтів пружного защемлення K , α для балона 16AK ($a = 10,5$ см; $b = 10,795$ см; $c = 2,275$ см;

$$h_1 = 0,455 \text{ см}; \quad h_2 = 0,45 \text{ см}) \quad \text{при} \quad \nu = 0,22;$$

$$E = 6,04 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \alpha = 0,92 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}; \Delta t_1 = 10^\circ,$$

$$\Delta t_2 = 0^\circ \text{ /рис. 2, а/}; \Delta t_1 = 0^\circ, \Delta t_2 = 10^\circ \text{ /рис. 2, б/}.$$

Для оцінки впливу врахування позовових переміщень розглянуто однорозмірний випадок, коли всі характеристики не залежать від координати x . Тоді рівності /1/ - /5/ спрощуться очевидним чином, а замість /6/ матимемо умову рівності переміщень

$$w_1(0) = u_2(0), \quad w_2(0) = u_1(0)$$

та умову рівності вусиль

$$\frac{d^2 w_1}{dy_1^2}(0) = \frac{12h_2}{h_1^3} \left[\frac{du_2}{dy_2}(0) - \alpha(1+\nu)T_2(0) \right],$$

$$\frac{d^2 w_2}{dy_2^2}(0) = \frac{12h_1}{h_2^3} \left[\frac{du_1}{dy_1}(0) - \alpha(1+\nu)T_1(0) \right],$$

де u_i - позовові переміщення в пластинках, що задовольняють рівняння

$$\frac{d^2 u_i}{dy_i^2} = \alpha(1+\nu) \frac{dT_i}{dy_i}, \quad i = 1, 2$$

та умову симетрії $u_i(y_i) = -u_i(0 - y_i)$, причому

$$T_i = \frac{1}{h_i} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} t_i dy_{i-1}.$$

На рис. 3 показано відносну похибку $\delta = \frac{\sigma^* - \sigma}{\sigma}$ / σ, σ^* - максимальні напруження з врахуванням та без врахування позовових переміщень/ для сумарних напружень в екрані салона ІБЛК від атмосферного тиску та хімічних перепадів температури по товщині пласти-

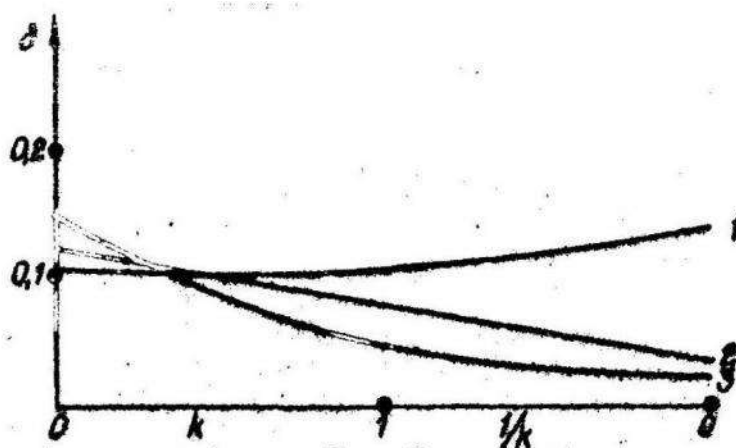


Рис. 3.

ном ($\Delta t_1 = 10^\circ, \Delta t_2 = 0^\circ$) і висоті пояса $\Delta t_0 = 20^\circ$. Криві 1 - 3 відповідають значенням $2\epsilon = \infty, 1, 0$. Відносні похибки при $\Delta t_1 = 0^\circ, \Delta t_2 = 10^\circ$ мають ту саму величину.

Список літератури: 1. М е л а н Э., Паркуо Г. Температурне напруження, викликане стаціонарними температурними полями. - М.: Фізматгиз, 1958. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неусталовившиєся температурне поле і напруження в тонких пластинках. - Київ: Наукова думка, 1972. 3. Хлебников Д.Г., Парасяк А.Н. Приближений метод определения напряжений в экранном узле кинескопа с плоским экраном. - В кн.: Качество электронно-лучевых приборов. Київ: Наукова думка, 1977.

Стаття надійшла в редакцію 19.02.1980 р.

УДК 539.3:681.3.057

М.Ф.Копитко, Я.Г.Савула

ПРО МОЖЛИВІСТЬ ВЕХТУВАННЯ РІЗНИЦЮ РАДІУСІВ ВОЛОКОН КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРУБИ ПРИ ЇЇ РОЗРАХУНКУ

У працях [1, 2] для розрахунку труб з каловою віссю як вихідну систему рівнянь використовують рівняння, одержані за припущення, що радіус перерізу труби малий порівняно з радіусом осі. Ми досліджуємо можливість аналогічних спрощень для розв'язування задачі про

рівновагу криволинійної труби у переміщенні мінімалітичним способом методу скінченних елементів /МСЕ/ [4].

Розглядаємо тонку пружну оболонку товщиною h , середина поверхні якої утворена дугом кола радіуса R ,

$$\xi = -R \sin \alpha_1, \quad \eta = R \cos \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$$

по довільній плоскій напрямній

$$x = R_2 \chi(\alpha_2), \quad y = R_2 \xi(\alpha_2), \quad \alpha_2^0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^0, \quad R_2 = \text{const.} \quad (1)$$

В ортогональній спрямленій системі координат α_1, α_2 коефіцієнти Ляме A_1, A_2 і головні кривини $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ середньої поверхні мають вигляд

$$A_1 = R_1, \quad A_2 = R_2 t(\alpha_1, \alpha_2), \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \alpha_1 \tau(\alpha_2)}{R_2 t(\alpha_1, \alpha_2)},$$

де

$$t(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ 1 + \frac{R_1}{R_2} \sin \alpha_1 \frac{\xi'' \chi' - \xi' \chi''}{[\chi'^2 + \xi'^2]^{3/2}} \right\} (\chi'^2 + \xi'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$\tau(\alpha_2) = \frac{\xi'' \chi' - \chi'' \xi'}{\chi'^2 + \xi'^2}.$$

Для спрощення розрахунків вважаємо, що в формулі (2) можна нехтувати величиною $\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha_1 \frac{\xi'' \chi' - \xi' \chi''}{[\chi'^2 + \xi'^2]^{3/2}}$ порівняно з одиницею, тобто аналогічно як і в працях [1, 2] розглянемо різницю радіусів волокон труби.

$$\text{Маємо } t(\alpha_2) = (\chi'^2 + \xi'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Згідно з варіаційним принципом Лагранжа [3, 5], переміщення, які виникають в оболонці, надають мінімуму функціоналу

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T [C^T B C u - 2P] A, A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3)$$

на множині функцій переміщень $u \in W_2'(\Omega)$, $v \in W_2'(\Omega)$,

$w \in W_2^2(\Omega)$, що задовольняють геометричні граничні умови.

Тут $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2 : 0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi, \alpha_2^0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^0\}$; $u = (u, v, w)^T$

вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; C - матриця зв'язку між вектором u і вектором деформацій точок серединної поверхні $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \kappa_1, \kappa_2, 2\tau)^T$;

$P = (p_1, p_2, p_n)^T$ - вектор поверхневого навантаження; B - матриця фізичних співвідношень теорії оболонок $\sigma = B\varepsilon$, де $\sigma = (T_1, T_2, S, M_1, M_2, N)^T$.

Розв'язок задачі про мінімум функціоналу /3/ шукаємо аналогічно як і в праці [4] у вигляді

$$u = \sum_{m=0}^M \psi_m(\alpha_1) \psi_m(\alpha_2),$$

де

$$\psi_m(\alpha_i) = \begin{cases} \cos \frac{m}{2} \alpha_i, & (-1)^m > 0 \\ \sin \frac{m}{2} \alpha_i, & (-1)^m < 0. \end{cases}$$

Поділимо область Ω на смуги

$$\Omega_i = \{\alpha_1, \alpha_2 : 0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi, \alpha_2^{i-1} \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^i\}, \quad i = \overline{1, e},$$

побудуємо на заданій сукупності точок $\{\alpha_2^0, \alpha_2^1, \dots, \alpha_2^e\}$ скінченно-елементні апроксимації вектор-функції $\psi_m(\alpha_2)$ так, щоб простір допустимих функцій, які наближають $\psi_m(\alpha_2)$, не виходив із області визначення функціоналу /3/. На проміжку $[\alpha_2^{i-1}, \alpha_2^i]$ зобразимо, вектор-функцію $\psi_m(\alpha_2)$ у вигляді

$$\psi_m(\alpha_2) = N^i(\alpha_2) q_m^i,$$

де $N^i = (N_{2-i}^i, N_1^i)$ - матриця, елементами якої є поліноми Ерміта першого і третього степенів; $q_m^i = (q_{mi-1}^i, q_{mi}^i)^T$ - вектор невідомих вузлових коефіцієнтів розкладів функцій $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$.

Записуючи необхідну умову мінімуму функціоналу /3/ по параметрах q_m^i , одержуємо для їх визначення систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Щоб визначити чи можливо нехтувати радіусами волокон середньої поверхні труби, за вказаною схемою проведені числові розрахунки у випадку замкнутої тороподібною оболонки, плоска напрямна якої /1/ задана рівняннями

$$x = R_2 \cos \alpha_2, \quad y = R_2 \sin \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi.$$

При цьому враховували такі варіанти спрощень:

а/ нехтування різницею радіусів волокон середньої поверхні труби у вихідних рівняннях при виведенні основних співвідношень методу;

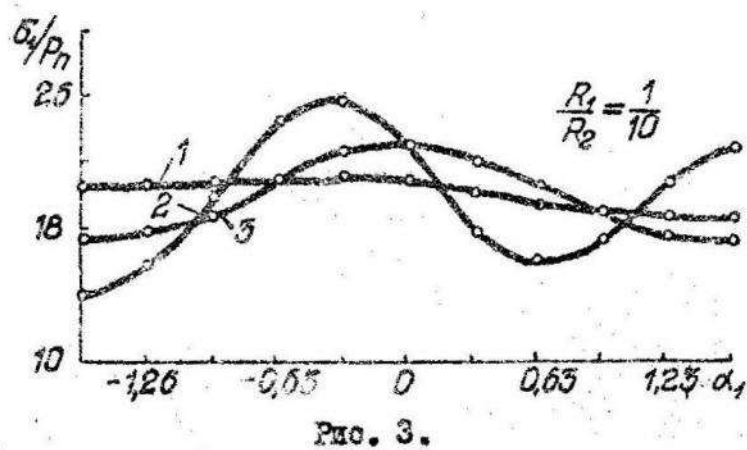
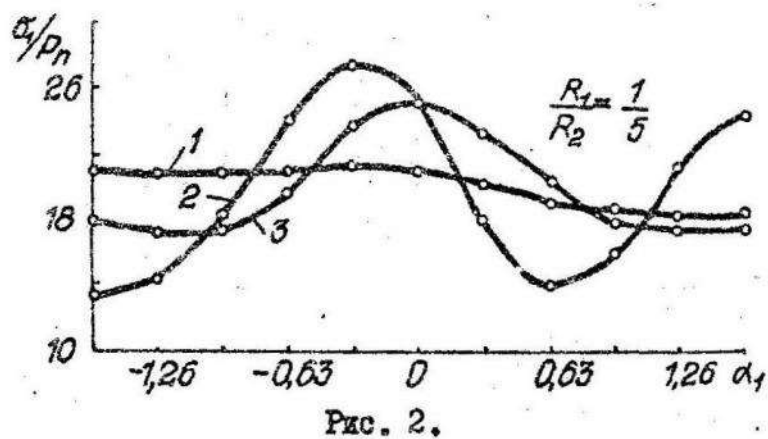
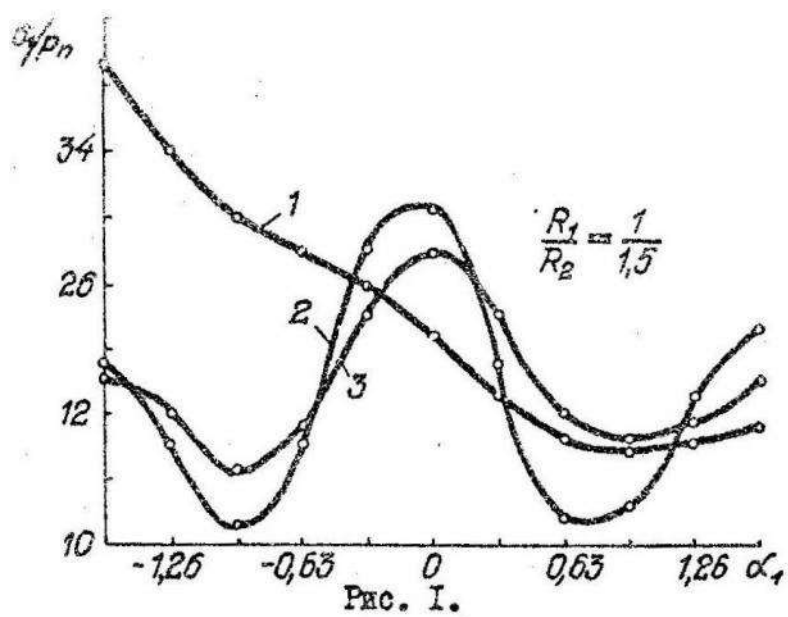
б/ нехтування $\frac{R_1}{R_2} \sin \alpha$, $\frac{f''x' - f'x''}{[x'^2 + f'^2]^{3/2}}$ у формулі для $t(\alpha_1, \alpha_2)$ при обчисленні інтегралів по α , що входять у функціонал /3/;

в/ те ж саме, що і в пункті б/ лише в інтегралах, що входять тільки у квадратичну частину функціоналу.

На рис. І-3 показані графіки напруження σ_i / ρ_{ii} на зовнішній поверхні тора, навантаженого внутрішнім рівномірно розподіленим тиском $p = 10^4$; $\nu = 0,3$; $k = 0,05$ для різних відношень $\frac{R_1}{R_2}$.

Крива 1 відповідає розв'язку задачі за вказаною схемою [4] без будь-яких спрощень, крива 2 - зі спрощеннями а/; крива 3 - зі спрощеннями б/, в/.

Порівнюючи отримані результати, бачимо, що найбільш суттєву похибку в розв'язок вносить допущення а/. Переміщення і напруження у цьому випадку не збігаються і кількісно, і якісно з розв'язками, одержаними без вказаних допущень. Що ж стосується варіантів б/ і в/, то близьким до істинного є напруження σ_i при значеннях відношення $\frac{R_1}{R_2}$, за яких для визначення розрахункових величин можна використати розв'язки для циліндричної оболонки з радіусом поперечного перерізу R_1 ($\frac{R_1}{R_2} < \frac{1}{100}$).



Таким чином, розв'язуючи задачі про пружну рівновагу криволінійних труб в переміщеннях шляхом мінімізації функціоналу Лагранжа за вказаною схемою МСЕ, різницеві радіусів волокон середньої поверхні нехтувати не можна.

Список літератури: 1. А к с е л ь р а д Э.Л. Гибкие оболочки. - М.: Наука, 1976. 2. А к с е л ь р а д Э.Л., И л ь и н В.П. Расчет трубопроводов. - Л.: Машиностроение, 1972. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 4. С а в у л а Я.Г., Ф л е й ш м а н Н.П., Ш и н к а р е н к о Г.А. Метод расчета труб с произвольной криволинейной осью. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978, № 32. 5. Ч е р н ы х К.Ф. Линейная теория оболочек. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. Т.2.

Стаття надійшла в редакцію 13.II.1979 р.

УДК 539.3

Р.І.Мокрик, Ю.А.Паздерський, В.Ф.Кочубей,

І.М.Гутор, І.В.Оліярник

СТАЦІОНАРНИЙ ТЕПЛОСМІН ПРИ РУСІ ГАЗУ

МІЖ ДВОМА СПІВОСНИМИ КРУГОВИМИ ЦИЛІНДРАМИ

Питання теплообміну в потоці в'язкого газу вивчено ще недостатньо. У праці [4] методом "стержневої" моделі проаналізовано температурне поле в турбулентному потоці газу. Нестационарний теплообмін в суцільній трубі в ламинарному потоці газу досліджено в працях [1, 3].

Ми розглядаємо задачу про визначення температурного поля в'язкого газу, який рухається між двома співосними круговими циліндрами радіусів ξ_1 і ξ_2 , $\xi_2 > \xi_1$, за умови, що газ нестисливий, теплофізичні параметри його постійні, теплопровідність у напрямі осі симетрії z відсутня. Нехтуємо також тепловідводом за рахунок дисипації енергії.

Припускаємо, що температура зовнішньої і внутрішньої границі яка обмежує потік, підтримується постійною при відповідно величинах

T_1^* і T_2^* , а газ входить у досліджувану область зі сталим поперерізу температурою T_0 і швидкістю W_1^0 .

За цих умов внаслідок осової симетрії задача визначення температурного поля газу зводиться до розв'язування рівняння енергії теплопровідного в'язкого газу

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = P_0 W_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad /1/$$

при граничних умовах:

$$\begin{aligned} \xi=0 \quad T(\rho, 0) &= 1, \\ \rho=1 \quad T(1, \xi) &= T_1, \\ \rho=N \quad T(N, \xi) &= T_2, \end{aligned} \quad /2/$$

де $T = T(\rho, \xi)$ - безрозмірна температура, що дорівнює температурі потоку, віднесеній до величини температури на вході T_0 , $T_1 = \frac{T_1^*}{T_0}$

$T_2 = \frac{T_2^*}{T_0}$; $\rho = \frac{r}{r_1}$; $\xi = \frac{z}{z_1}$; $N = \frac{r_2}{r_1}$; $P_0 = \frac{W_1^0 z_1}{\kappa}$ - критерій Пекле; $\kappa = \alpha + \varepsilon_0$; α - коефіцієнт температуропровідності; ε_0 - коефіцієнт турбулентної температуропровідності.

Нелінійний профіль швидкості W_1 течії Пуазейля між співвісними циліндричними поверхнями [2], апроксимуючи поліномом другого степеня, запишемо у вигляді

$$W_1 = \sum_{k=0}^2 \alpha_k \rho^k, \quad /3/$$

де

$$\alpha_0 = \theta N; \quad \alpha_1 = -\theta(1+N); \quad \alpha_2 = \theta;$$

$$\theta = \frac{\Delta P z_1^2}{\mu L W_1^0} \left[\frac{(N-1)^2 - 2}{2(N-1)^2} + \frac{L \pi (N+1)}{L \pi (N)} \right];$$

ΔP - постійний перепад тиску на відстані L ; μ - коефіцієнт в'язкості газу.

Розв'язок задачі /1/ - /3/ зобразимо як

$$T(\rho, \xi) = u_0(\rho, \xi) + u_1(\rho, \xi) + u_2(\rho, \xi), \quad /4/$$

де u_0 - розв'язок крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_0}{\partial \rho} = \rho_0 \alpha_0 \frac{\partial u_0}{\partial \zeta},$$

$$u_0|_{\zeta=0} = 1; \quad u_0|_{\rho=1} = \frac{1}{3} T_1; \quad u_0|_{\rho=N} = \frac{1}{3} T_2, \quad /5/$$

а u_1 і u_2 - відповідно крайових задач

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n}{\partial \rho} = \rho_0 \alpha_n \rho^n \frac{\partial u_n}{\partial \zeta}; \quad n=1,2, \quad /6/$$

$$u_n|_{\zeta=0} = 0; \quad u_n|_{\rho=1} = \frac{1}{3} T_1; \quad u_n|_{\rho=N} = \frac{1}{3} T_2.$$

Для знаходження розв'язків крайових задач /5/, /6/ скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа по змінній ζ :

$$\bar{u}_n(\rho, s) = \int_0^\infty u_n(\rho, \zeta) e^{-s\zeta} d\zeta, \quad /7/$$

$$u_n(\rho, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{u}_n(\rho, s) e^{s\zeta} ds. \quad /8/$$

Тоді для визначення трансформанти Лапласа функції u_0 отримаємо наступну граничну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho} &= \rho_0 \alpha_0 (s \bar{u}_0 - 1), \\ \bar{u}_0|_{\rho=1} &= \frac{1}{3} \frac{T_1}{s}; \quad \bar{u}_0|_{\rho=N} = \frac{1}{3} \frac{T_2}{s} \end{aligned} \quad /9/$$

і відповідно для u_1 та u_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \rho} &= \rho_0 \alpha_n \rho^n s \bar{u}_n, \\ \bar{u}_n|_{\rho=1} &= \frac{1}{3} \frac{T_1}{s}; \quad \bar{u}_n|_{\rho=N} = \frac{1}{3} \frac{T_2}{s} \end{aligned} \quad n=1,2, \quad /10/$$

Розв'язки задач /9/-/10/ мають вигляд

$$u_0(\rho, s) = \frac{1}{s} \left[1 + \left(\frac{1}{3} T_1 - 1 \right) \frac{F_{1,1}(\rho, \beta)}{F_{1,0}(\rho, \beta)} - \left(\frac{1}{3} T_2 - 1 \right) \frac{F_{2,1}(\rho, \beta)}{F_{2,0}(\rho, \beta)} \right],$$

$$u_1(\rho, s) = \frac{1}{3s} \left[T_1 \frac{F_{3/2, 3/2}(\rho, \beta')}{F_{3/2, 0}(\rho, \beta')} - T_2 \frac{F_{0, 3/2}(\rho, \beta')}{F_{3/2, 0}(\rho, \beta')} \right],$$

/II/

$$u_2(\rho, s) = \frac{1}{3s} \left[T_1 \frac{F_{2,2}(\rho, \beta'')}{F_{2,0}(\rho, \beta'')} - T_2 \frac{F_{0,2}(\rho, \beta'')}{F_{2,0}(\rho, \beta'')} \right],$$

де

$$F_{m,n}(\rho, \beta) = J_0(\rho''\beta) Y_0(N''\rho) - J_0(N''\beta) Y_0(\rho''\beta);$$

$$\beta = \sqrt{-\alpha_0 s P_0}; \quad \beta' = \frac{2}{3} \sqrt{-\alpha_1 s P_0}; \quad \beta'' = \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha_2 s P_0};$$

$J_0(x), Y_0(x)$ — функції Бесселя першого і другого роду нульового порядку.

Застосовуючи до /II/ формулу обернення інтегрального перетворення Лапласа і враховуючи /4/, дістаємо функції розподілу температурного поля, які є розв'язком поставленої задачі /I/ — /3/, у вигляді:

$$\begin{aligned} T(\rho, \xi) = & 1 + \left(\frac{1}{3} T_1 - 1 \right) \left[W_{1,1}'(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{1,1}(\rho, \beta_m^0)}{M_1(\beta_m^0)} \exp(-L_0(\beta_m^0) \xi) \right] - \\ & - \left(\frac{1}{3} T_2 - 1 \right) \left[W_{1,1}^0(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{0,1}(\rho, \beta_m^0)}{M_1(\beta_m^0)} \exp(-L_0(\beta_m^0) \xi) \right] + \\ & + \frac{1}{3} T_1 \left[W_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{3/2, 3/2}(\rho, \beta_m')}{M_{3/2}(\beta_m')} \exp\left(-\frac{2}{4} L_1(\beta_m') \xi\right) \right] - \\ & - \frac{1}{3} T_2 \left[W_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^0(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{0, 3/2}(\rho, \beta_m')}{M_{3/2}(\beta_m')} \exp\left(-\frac{2}{4} L_1(\beta_m') \xi\right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} T_1 \left[W'_{2,2}(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{2,2}(\rho, \beta_m^2)}{M_2(\beta_m^2)} \exp(-4L_2(\beta_m^2)\xi) \right] - \\ - \frac{1}{3} T_2 \left[W^0_{2,2}(\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{2,2}(\rho, \beta_m^2)}{M_2(\beta_m^2)} \exp(-4L_2(\beta_m^2)\xi) \right], \quad /12/$$

де

$$M_2(\beta) = \beta [P_2(\beta) + N^2 Q_2(\beta)];$$

$$W'_{2,2}(\rho) = \frac{\rho^2 - N^2}{1 - N^2}; \quad L_2(\beta) = \frac{\beta^2}{\alpha_j P_2};$$

$$P_2(\beta) = Y_1(\beta) J_0(N^{1/2} \beta) - J_1(\beta) Y_0(N^{1/2} \beta);$$

$$Q_2(\beta) = J_1(N^{1/2} \beta) Y_0(\beta) - J_0(\beta) Y_1(N^{1/2} \beta);$$

β_m^2 - відповідно коренями рівняння

$$J_0(\beta) Y_0(\beta N^{1/2}) - J_0(\beta N^{1/2}) Y_0(\beta) = 0.$$

Відзначимо, що на основі формули /12/ можна отримати розв'язок аналогічної задачі, коли на межах області задані теплові потоки, або на одній межі тепловий потік, а на іншій температура.

Список літератури: 1. А л е к с а н д р о в В.А. Сопряженная стационарная задача теплообмена в полубесконечной трубе с движущейся жидкостью с учетом диссипации механической энергии. - ИЖ, 1968, т.14. 2. Л о й ц я н с к и й Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1970. 3. П е т у х о в Б.М. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. - М.: Энергия, 1967. 4. *Stein R.P. Engineering relationships for turbulent forced convection heat transfer in ducts with flux transients - Report of Engineering and Technology Division Argonne National Laboratory. ANZ-1754, November 2, 1970.*

Стаття надійшла в редакцію 10.02.1980 р.

Р. І. Мокрич, І. В. Окулінич

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПСЕВДОКОЛИВАНЬ

Як відомо [1, 2] у загальному випадку зв'язок між деформаціями і напруженнями для термов'язкопружого тіла задається співвідношеннями

$$\begin{cases} P_1(\alpha) s_{ij} = P_2(\alpha) e_{ij} \\ P_3(\alpha) \sigma_{kk} = P_4(\alpha) (\epsilon_{kk} - 3\alpha T) \end{cases} \quad /1/$$

де

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}; \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk};$$

$$P_i(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(n)} \alpha^{(n)}, \quad i=1,2,3,4; \quad \alpha^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$

У випадку моделі Біс залежності між компонентами напруженого і деформованого стану мають такий вигляд:

$$\sigma_{ij}(t) = 2 \int_0^t \alpha(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau + \delta_{ij} \left\{ \int_0^t \theta(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} d\tau - \int_0^t (3\theta(t-\tau) + 2\alpha(t-\tau)) \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \right\} /2/$$

де $\alpha(t)$, $\theta(t)$ - функції часу, які у випадку ідеально пружного тіла відповідають постійним Ляме μ_0 і λ_0 .

З формул /1/ випливають часткові випадки:

ідеально пружне тіло

$$P_1(\alpha) = 1; \quad P_2(\alpha) = 2\mu_0; \quad P_3(\alpha) = 1; \quad P_4(\alpha) = 3\lambda_0;$$

тіло Фойхта або Кельвіна

$$P_1(\alpha) = 1; \quad P_2(\alpha) = 2\mu_0 (1 + \tau_K \alpha); \quad P_3(\alpha) = 1; \quad P_4(\alpha) = 3\lambda_0; \quad /3/$$

тіло Максвелла

$$P_1(\alpha) = (1 + \tau_M \alpha) \frac{1}{2\mu_0 \tau_M}; \quad P_2(\alpha) = \alpha; \quad P_3(\alpha) = 1; \quad P_4(\alpha) = 3\lambda_0, \quad /4/$$

де λ_0 - об'ємний модуль пружності ідеально пружного тіла; τ_K , τ_M - час релаксації тіл Кельвіна та Максвелла.

З /1/, /2/ випливає система рівнянь термов'язкопружності:

$$M(\vec{u}) = 0,$$

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \gamma \operatorname{div} \vec{u} - \gamma \tau_2 \operatorname{div} \ddot{\vec{u}} = 0, \quad /5/$$

де $M(\vec{u})$ дорівнює

у випадку формули /1/

$$M(\vec{u}) = L_1(\alpha) \Delta \vec{u} + L_2(\alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - L_3(\alpha) \alpha_T \operatorname{grad} T - L_4(\alpha) \rho \ddot{\vec{u}} \\ L_1(\alpha) = P_2(\alpha) P_3(\alpha); L_2(\alpha) = \frac{1}{3} [2P_4(\alpha) P_1(\alpha) + P_2(\alpha) P_3(\alpha)] \quad /6/$$

$$L_3(\alpha) = 2P_4(\alpha) P_1(\alpha); L_4(\alpha) = 2P_1(\alpha) P_3(\alpha);$$

у випадку формули /2/

$$M(\vec{u}) = \int_0^t \left\{ a(t-\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} (\Delta \vec{u}) + [a(t-\gamma) + b(t-\gamma)] \frac{\partial}{\partial \gamma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} \right\} d\gamma - \int_0^t c(t-\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \operatorname{grad} T d\gamma - \\ - \rho \ddot{\vec{u}}; \quad c(t) = [3b(t) + 2a(t)] \alpha_T.$$

Система рівнянь /5/ для випадку псевдоколивань набуває вигляду

$$B(\partial_x, \omega) \cdot U = 0, \quad /8/$$

де

$$U = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix}; \quad B_{ij} = (\bar{\lambda} + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} (\bar{\mu} \Delta + \omega^2 \rho) \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$B_{4j} = -\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3; \quad B_{i4} = (\gamma i \omega + \gamma \omega^2 \tau_2) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; \quad B_{44} = \Delta + \frac{i\omega}{\alpha} + \frac{\omega^2}{c_g^2};$$

$$\bar{\mu} = \frac{P_2(\omega)}{2P_1(\omega)}; \quad \bar{\lambda} = \frac{P_1(\omega) P_4(\omega) - P_2(\omega) P_3(\omega)}{3P_1(\omega) P_3(\omega)} \quad \text{у випадку /1/}; \quad /9/$$

$$\bar{\mu} = -i\omega \bar{\alpha}, \quad \bar{\lambda} = -i\omega \bar{\beta} \quad \text{у випадку /2/}; \quad /10/$$

$$\det B(\partial_x, \omega) = \bar{\mu}^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) (\Delta + \lambda_1^2) (\Delta + \lambda_2^2) (\Delta + \lambda_3^2)^2;$$

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\alpha} + \frac{\omega^2}{c_g^2} + \frac{\gamma i\omega + \gamma \tau_2 \omega^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \bar{\beta} + \frac{\rho \omega^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \\ \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \left(\frac{i\omega}{\alpha} + \frac{\omega^2}{c_g^2} \right) \frac{\rho \omega^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \\ \lambda_3^2 = \frac{\rho \omega^2}{\bar{\mu}}; \end{cases} \quad /11/$$

За аналогії з праці [3] введемо матрицю фундаментальних розв'язків системи /8/:

$$\Phi(x, \omega) = \|\Phi_{kj}\|_{4 \times 4}$$

$$\Phi_{kj} = \sum_{n=1}^3 \left\{ (1-\delta_{kj}) (1-\delta_{j1}) \left(\frac{\delta_{kn}}{2\mu\kappa} \delta_{2n} - \alpha_n \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j} \right) + \int_n \left[(i\omega\gamma + \omega^2\gamma\tau_2) \delta_{k4} (1-\delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta \delta_{j4} (1-\delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + \delta_{k4} \delta_{j4} \rho_n \right\} \frac{\exp(i\lambda_n |x|)}{|x|}, \quad /12/$$

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n \left[1 - \left(\frac{i\omega}{\alpha} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \lambda_n^{-2} \right] (\delta_{1n} + \delta_{2n})}{2\kappa (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) (\lambda_n^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{2n}}{2\kappa \rho \omega^2}, \quad \sum_{n=1}^3 \alpha_n = 0,$$

$$\delta_n = \frac{(-1)^n (\delta_{1n} + \delta_{2n})}{2\kappa (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) (\lambda_n^2 - \lambda_1^2)}; \quad \sum_{n=1}^3 \delta_n = 0; \quad \rho_n = \frac{(-1)^n (\lambda_n^2 - \kappa_1^2) (\delta_{1n} + \delta_{2n})}{2\kappa (\lambda_n^2 - \lambda_1^2)},$$

$$\sum_{n=1}^3 \rho_n = 1, \quad \kappa_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}.$$

Легко перевірити, що кожний вектор-стовпець у фундаментальній матриці $\Phi(x, \omega)$ має єдину особливість у точці $x = 0$ порядку не вище $|x|^{-1}$. Крім цього, з /12/ випливає така теорема.

Т е о р е м а I. Кожний вектор-стовпець матриці $\Phi(x, \omega)$ задовольняє систему /8/ всюди в просторі R^3 за винятком початку координат.

Властивості фундаментальних розв'язків.

У випадку моделі Біо при

$$\alpha(t) = \mu_0 \exp(-\varepsilon t); \quad \delta(t) = \lambda_0 \exp(-\varepsilon t), \quad /13/$$

де ε^{-1} — час релаксації, з /10/ випливає

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{\omega}{\omega + i\varepsilon}; \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \frac{\omega}{\omega + i\varepsilon}. \quad /14/$$

Для тіла Фойгта /або Кельвіна/ $\bar{\lambda}$ і $\bar{\mu}$ дорівнюють

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \omega \tau_\lambda; \quad \bar{\mu} = \mu_0 (1 - i\omega \tau_\mu). \quad /15/$$

У випадку моделі Максвелла

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \frac{i\varepsilon \tau_\lambda^{-1}}{\omega + i\varepsilon \tau_\lambda^{-1}}; \quad \bar{\mu} = \mu_0 \left(1 - \frac{i\varepsilon \tau_\mu^{-1}}{\omega + i\varepsilon \tau_\mu^{-1}} \right). \quad /16/$$

Для даної моделі характеристичні параметри λ_k ($k=1,2,3$) мають такі властивості:

а/ при $|\omega| \rightarrow \infty$ і $\operatorname{Im} \omega > 0$, $\lambda_k \sim O(1/\omega)$, $k=1,2,3$,

б/ $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ при $\operatorname{Im} \omega > 0$,

$\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$ при $\operatorname{Re} \omega \geq 0$.

Властивість а/ випливає безпосередньо з формули /II/. Доведення властивості б/ для λ_k ($k=1,2$) /для параметра λ_3 дана властивість в отриманню/ базується на аналізі на відповідних листах різномановної поверхності характеристичних параметрів λ_k ($k=1,2$) функцій:

$$\rho(\omega) = \sqrt{\omega} \quad \text{і} \quad q_k(\omega) = \sqrt{\psi_k(\omega)},$$

де

$$\psi_k(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\omega}{c_g^2} + \frac{\varepsilon i + \varepsilon \varepsilon_2 \omega}{\lambda + 2\mu} \beta + \frac{\rho \omega}{\lambda + 2\mu} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\omega}{c_g^2} + \frac{\varepsilon i + \varepsilon \varepsilon_2 \omega}{\lambda + 2\mu} \beta + \frac{\rho \omega}{\lambda + 2\mu} \right)^2 - 4 \frac{\rho \omega}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\omega}{c_g^2} \right)} \right\}$$

причому $\lambda_k = \rho(\omega) \cdot q_k(\omega)$.

Т е о р е м а 2. Елементи матриці фундаментальних розв'язків $\Phi(x, \omega)$ системи /8/ є регулярними функціями комплексної змінної ω у півплощині $\operatorname{Im} \omega > 0$.

Твердження цієї теореми випливає з аналітичності у півплощині $\operatorname{Im} \omega > 0$ виразів

$$\beta_1 = \frac{\exp(i\lambda_1|x|) - \exp(i\lambda_2|x|)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2},$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda_2^2 \exp(i\lambda_1|x|) - \lambda_1^2 \exp(i\lambda_2|x|)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}.$$

Регулярність β_1 і β_2 у півплощині $\operatorname{Im} \omega > 0$ випливає з регулярності функцій

$$J_1 = \frac{\sin(\rho(\omega) x_1(\omega))}{\rho(\omega)}, \quad J_2 = \cos(\rho(\omega) x_2(\omega)).$$

де

$$x_1(\omega) = x_2(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} \rho^{2k}(\omega) |x| \quad - \text{регулярна функція в } \operatorname{Im} \omega > 0$$

$f_2(\omega) = f_1(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \rho^{2k}(\omega) / \omega$ - регулярна функція в $\text{Im} \omega > 0$

на основі теореми про узагальнені аналітичні функції [2].

Список літератури: І. Ільїн А.А., Победра Б.В. Основи математической теории термоупругости. - М.: Наука, 1970.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Наука, 1965.
3. Купрадзе В.Д., Гегелія Т.Г., Бачелайшвілі М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - М.: Наука, 1976.

Стаття надійшла в редакцію 10.02.1980 р.

UDC 639.311

В.Л.Григорукт, М.С.Драган

АНТИКЛОСНА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА

І ТОНКОШОВИЙ ПРУЖИННИЙ ВПЛИВ

Розглянуто пружну деформацію тіла з тонкошовим пружним впливом однієї пари шовів шириною $2a$ і розмахом $2h$. Тіло перебуває під дією зосереджених сил (факторів) і однорідного поля напружень на безконечності в умовах антикосої деформації (рис. 1).

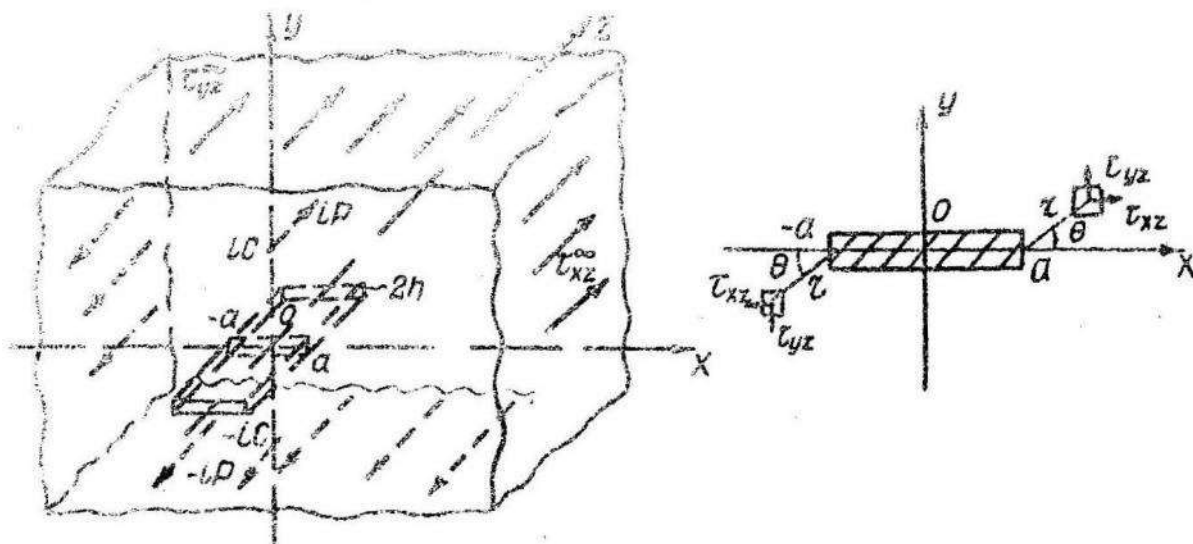


Рис. 1.

Величини, які характеризують тонкостінне включення, позначимо з індексом нуль, знаками плюс і мінус – граничні значення функцій на верхньому та нижньому берегах включення, сегмент дійсної осі $[-a, a]$ – через L .

На берегах включення наявні умови спав

$$\tau_{yz}^+ = (\tau_{yz})_0^+, W^+ = W_0^+. \quad /1/$$

Як відомо [3], компоненти тензора напружень τ_{xz}, τ_{yx} переміщення w виражаються через одну аналітичну функцію $f(z)$

$$W(x, y) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z), \tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z), \quad /2/$$

де μ – модуль зсуву матриці.

Для тонкостінного включення можемо записати аналогічно як у праці [2]:

$$(\tau_{yz})_0^+ - (\tau_{yz})_0^- = h Q_1'(x), (\tau_{yz})_0^+ + (\tau_{yz})_0^- = P_1(x), \quad /3/$$

$$(W_0^+ - W_0^-)' = \frac{h}{\mu_0} P_1'(x), (W_0^+ + W_0^-)' = \frac{1}{\mu_0} Q_1(x),$$

де $P_1(x), Q_1(x)$ – невідомі функції.

Виходячи з /1/ і беручи до уваги /2/ і /3/, одержуємо такі крайові задачі:

$$F^+(x) - F^-(x) = h \left[\frac{\mu}{\mu_0} P_1'(x) + i Q_1'(x) \right], \quad /4/$$

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{\mu}{\mu_0} [Q_1(x) + \varepsilon Q_0(x)] - i [P_1(x) + \varepsilon P_0(x)], \quad /5/$$

де

$$Q_0(x) - i P_0(x) = 2 F_0(x); \varepsilon = \frac{\mu \ln(\mu_0/\mu)}{\mu_0};$$

$$P(x) = P_1(x) - \varepsilon P_0(x); Q(x) = Q_1(x) - \varepsilon Q_0(x);$$

$F_0(z)$ – розв'язок задачі для тіла без включення; $Q_0(x)$ і $P_0(x)$ – дійсні функції.

Розв'язок задачі лінійного співвідношення /4/ має вигляд

$$F(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\left[\frac{\mu}{\mu_0} P'(x) + i Q'(x) \right]}{x-z} dx + F_0(z). \quad /6/$$

Підставляючи /6/ у /5/, запишемо два сингулярних інтегро-
диференціальних рівняння для визначення невідомих функцій $Q(x)$ і
 $P(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_0} Q(x) - \frac{h}{\kappa} \int_{-a}^a \frac{Q'(t) dt}{t-x} &= 2(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \varepsilon) \operatorname{Re} F_0(x), x \in L \\ P(x) - \frac{h\mu}{\kappa\mu_0} \int_{-a}^a \frac{P'(t) dt}{t-x} &= 2(\varepsilon - 1) \operatorname{Im} F_0(x), x \in L. \end{aligned} \quad /7/$$

Розв'язок /7/ шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} Q(ax) \\ P(ax) \end{pmatrix} = -\sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \end{pmatrix} U_{m-1}(x), \quad |x| \leq 1, \quad /8/$$

де $U_m(x)$ - поліноми Чебишова другого роду; X_m, Y_m - невідомі
коефіцієнти, для визначення яких після відповідних перетворень отрим-
аємо дві квазірегулярні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa h}{2a} X_n + \frac{\mu}{\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} R(m,n) X_m &= 2 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \varepsilon - 1 \right) \operatorname{Re} I_n, \\ \frac{\kappa h \mu}{2a \mu_0} Y_n + \sum_{m=1}^{\infty} R(m,n) Y_m &= 2(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} I_n, \quad (n=1,2,\dots), \end{aligned} \quad /9/$$

де

$$I_n = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) F_0(ax) dx,$$

$$R(m,n) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (m+n) \text{ - нечетне,} & /10/ \\ \frac{1}{m(m+n+1)(m+n-1)} - \frac{1}{m(m-n+1)(m-n-1)}, \text{ якщо } (m+n) \text{ - парне} \end{cases}$$

Підставляючи /8/ у /6/, знаходимо вираз для функції $F(z)$

$$F(z) = \frac{h}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m - i \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \left[U_{m-1} \left(\frac{z}{a} \right) - \frac{a T_m \left(\frac{z}{a} \right)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] + F_0(z) \quad /11/$$

Із постановки задачі про напружено-деформований стан такої композиції випливає, що досить розглянути розподіл напружень і переміщень в одному поперечному перерізі $/XOY/$. Розподіл напружень і переміщень в околі кінців вклучення можна записати у вигляді /рис. 1/:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left(K_1 \cos \frac{\theta}{2} - K_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{z}),$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left(K_1 \sin \frac{\theta}{2} + K_2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{z}), \quad /12/$$

$$w = \frac{\sqrt{2z}}{\mu} \left(K_1 \cos \frac{\theta}{2} + K_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(z^{3/2}),$$

де K_1, K_2 - коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються формулами

$$K_1 - i K_2 = - \frac{h}{2\sqrt{a}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(2-j)} \left(X_m - i \frac{\mu}{\mu_0} Y_m \right) \quad /13/$$

$j=1$ для кінця $-a$ і $j=2$ для кінця a /.

Зробивши у формулах /7/ або /9/ граничний перехід відповідно при $\mu \rightarrow \infty, \mu_0 \rightarrow 0, \mu_0 \rightarrow \mu$, враховувачи /6/ і /II/, маємо розв'язок наступних задач: для абсолютно короткого вклучення, податливого вклучення /розрізу/ і для тіла без вклучення; а із формул /13/ - відповідно розподіл напружень і переміщень для короткого вклучення і тріщини [1, 3].

Проведено числовий аналіз задачі для навантажень таких видів:
 а/ на нескінченності прикладені напруження τ_{xz}^{∞} і τ_{yz}^{∞} ; зосе-
 реджені сили відсутні; б/ напруження на нескінченності відсутні, а
 в точках $z = \pm i c$, відповідно прикладені зосереджені сили
 $\pm i P$. Системи рівнянь /9/ розв'язували методом редукції. Обчис-
 лення проводили при $a/h = 10$. На рис. 2 показана залежність кое-

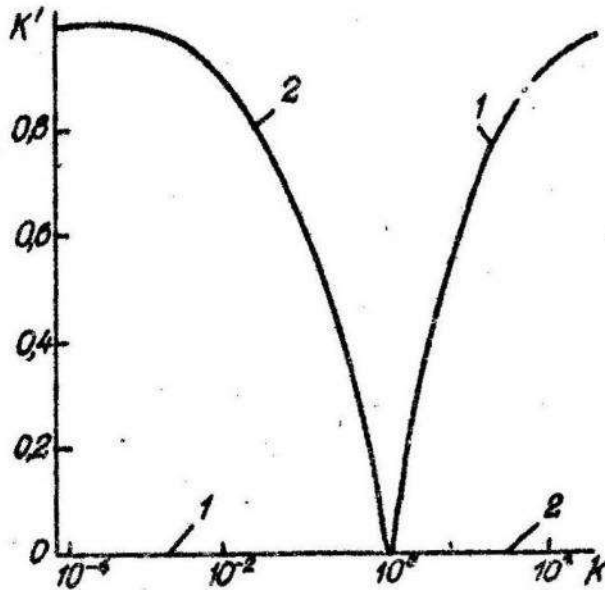


Рис. 2.

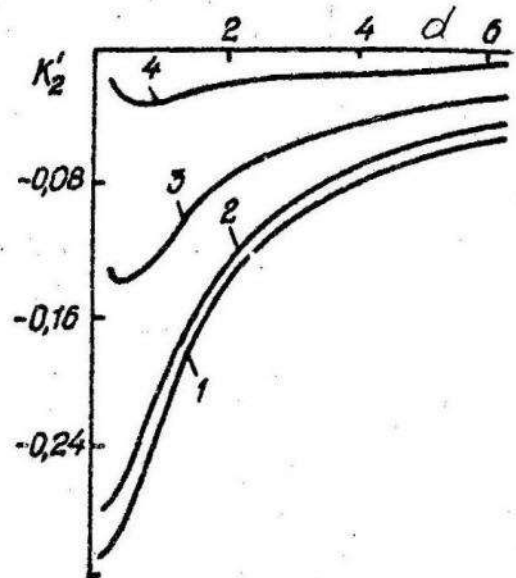


Рис. 3.

фіцієнтів інтенсивності напружень від відносної жорсткості включення

$K = \mu_0/\mu$ для випадку а/. Крива 1 характеризує $K'_1 = K_1/(\sqrt{a} \tau_{xz}^{\infty})$,
 крива - 2 - $K'_2 = K_2/(\sqrt{a} \tau_{yz}^{\infty})$. Залежність $K'_2 = K_2 \sqrt{a}/P$
 від відносної відстані між включеннями і точкою прикладання сили

$d = c/a$ для випадку б/ показана на рис. 3. Криві 1-4 характери-
 зуються послідовно такими значеннями параметра K : 10^{-3} ; 10^{-2} ; 10^{-1} ;
 0,5. Числовий розв'язок, отриманий для $K = 10^{-3}$ з точністю до 3%,
 збігається з аналітичним розв'язком для тріщини /розрізу/.

Список літератури: І. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., Л е н ь М.П.
 Антиплоская деформация тела с жесткими включениями. - Проблемы проч-
 ности, 1975, № 8. 2. М а г а н М.С., О п а н а с о в и ч В.К.
 Напряженное состояние полосои /балки/ с премолинейным тонкостенным
 включением. - ЦММ, 1978, т.43, № 2. 3. П а н а с е н в В.В., С а в -
 р у к М.Д., Д а д и н и н А.П. Распределение напряжений около тре-
 щин в пластине и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редакцію 15.02.1980 р.

В.О.Лихачов, Н.П.Флейшман

ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Розв'язок, який пропонується, є узагальненням нашої попередньої праці^[1] на випадок анізотропних пружних тіл. Він ілюструється на задачах про рівновагу трансверсально-ізотропного та ортотропного пружних шарів ($0 \leq x_3 \leq h$, $-\infty \leq x_1, x_2 < \infty$).

Для трансверсально-ізотропного тіла компоненти переміщень і напружень виражають у вигляді

$$\sigma_{\alpha\alpha} = C_{12}\theta + (C_{11} - C_{44}) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = C_{44} \frac{\partial^2 (\varphi_\alpha + \varphi_\beta)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad /1/$$

де функції $\varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ визначаються зі системи рівнянь

$$C_{44} \nabla^2 \varphi_\alpha + (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha^2} = -(C_{44} + C_{11})\theta, \quad /2/$$

$$\text{де } \theta = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2},$$

C_{11}, C_{12}, C_{44} — пружні сталі матеріалу; індекси $\alpha \neq \beta$ набувають значення 1, 2, 3.

Якщо ввести інтегральне перетворення Фур'є відносно змінних x_1, x_2 , то система /2/ у просторі зображень зводиться до

$$\frac{\alpha^2 \bar{\varphi}_\alpha}{\alpha x_3^2} - \alpha_\alpha^2 \bar{\varphi}_\alpha = \beta_\alpha \bar{\theta}, \quad /3/$$

Лихачов В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости. — Динамика и прочность машин, 1974, вып. 19.

$\bar{\varphi} = \delta_1' \varphi_1 - S_2' \varphi_2 + \frac{\alpha^2 \bar{\varphi}}{\alpha x_2^2}$. Коефіцієнти α_2, β_2 залежать від ексцентриситетів δ_1, S_2 змінних x_1, x_2 і пружних сталей матеріалу.

Припускаючи тимчасово, що права частина рівняння /3/ відома, шляхом інтегрування визначаємо x_3

$$\bar{\varphi}_2 = A_2 \operatorname{ch} \alpha_2 x_3 + B_2 \operatorname{sh} \alpha_2 x_3 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \int_0^{x_3} \bar{\theta}(S_1, S_2, \xi) \operatorname{ch} \alpha_2 (x_3 - \xi) d\xi, \quad /4/$$

де A_2, B_2 - сталі інтегрування.

Якщо підставити вираз /4/ у /3/, то дістанемо інтегральне рівняння відносно функції $\bar{\theta}(S_1, S_2, x_3)$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta} = \sum_{i=1}^3 S_i^2 (A_i \operatorname{ch} \alpha_i x_3 + B_i \operatorname{sh} \alpha_i x_3) - \\
 - \int_0^{x_3} \bar{\theta}(S_1, S_2, \xi) \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i (x_3 - \xi) d\xi.
 \end{aligned} \quad /5/$$

Шляхом послідовного диференціювання по x_3 та після виключення відповідних інтегралів рівняння /5/ зводимо до звичайного диференціального рівняння

$$\bar{\theta}'''' - g_1 S_2 \bar{\theta}''' + g_2 S_2^2 \bar{\theta}'' - g_3 S_2^3 \bar{\theta} = 0 \quad /6/$$

з певними крайовими умовами на $\bar{\theta}^{(\kappa)}$ ($\kappa = 0, 5$) при $x_3 = 0$.

Відомі коефіцієнти g_2 залежать від пружних сталей системи /2/.

Після визначення $\bar{\theta}$ з рівняння /6/ функції φ_2 знаходимо з формул /4/.

Застосовуючи перетворення Фур'є також до відповідних крайових умов задачі при $x_3 = 0$ та $x_3 = h$, одержуємо рівняння, які слугують для визначення A_2, B_2 . Знаючи зображення $\bar{\varphi}_2$ відомим способом знаходимо експліцити, а потім компоненти напружень і переміщень /1/.

У випадку ортотропного шару задача розв'язується аналогічно. Для визначення функцій φ_α у просторі зображень замість /3/ отримаємо систему

$$\frac{d^2 \varphi_\alpha}{dx_\beta^2} - \alpha_\alpha \varphi_\alpha = C_\alpha \bar{\theta}_\alpha, \quad /7/$$

де α_α , C_α залежать від дев'яти пружних сталих матеріалу,

$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$ - від $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\varphi}_3$; а $\bar{\theta}_3$ - тільки від $\bar{\varphi}_1$ та $\bar{\varphi}_3$.

Розв'язок системи /7/ також зводиться до крайової задачі типу /6/ відносно $\bar{\theta}_1$, після визначення якої знаходимо всі шукані функції $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\theta}_3$, та, нарешті, $\bar{\varphi}_3$.

Без принципових ускладнень запропонований розв'язок узагальнюється на випадок довільної анізотропії.

Стаття надійшла в редакцію 10.03.1980 р.

УДК 539.3+4+4.:621.81

М.В.Сулим, Г.Т.Сулим

ПРО МІЦНІСТЬ ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ ТРУБОПРОВОДІВ

Згідно з механікою крихкого руйнування міцність механічної конструкції з тріщиноподібними дефектами визначається коефіцієнтами інтенсивності напружень K_{IH} [1].

Розглянемо метод оцінки K_{IH} біля поздовньої тріщини всередині зварного шва тонкої циліндричної оболонки, яка завантажена внутрішнім тиском p , розтягується зусиллям P і скручується моментом M . Радіус кривини середньої поверхні оболонки R , товщина стінки $R^0 \ll R$, ширина зварного шва $2H$. Вдоль середньої лінії шва, що утворює кут γ з твірною оболонки, локалізовано тріщиноподібні дефекти, довжина яких мала порівняно з R . Найчастіше ц. дефекти не мають наскрізної природи, проте, розглядаючи гірший для міцності трубопроводу випадок, вважатимемо їх наскрізними.

Уперітьємо механічне зображення внутрішнього та зовнішнього поверхневого дефекту, оскільки на стінки внутрішньої тріщини діє додатково внутрішній тиск p . Експлуатація трубопроводів підтвердила, що процес руйнування найчастіше починається саме від внутрішньої тріщини. Побудована механічна модель допускає спрощення, якщо врахувати, що при $R^0 \ll R$ і вказаному зовнішньому навантаженні напружений стан оболонки можна вважати безмоментним, а трубу - в узагальненому плоскому напруженому стані.

Таким чином, поставлену задачу можна звести до вивчення напруженодеформованого стану тонкої пластинки, що містить смугу шириною $2H$ з іншими пружими постійними та системою колінеарних розрізів уздовж осрової лінії, коли на безмежності задано нормальні та дотичні напруження /рис. I/

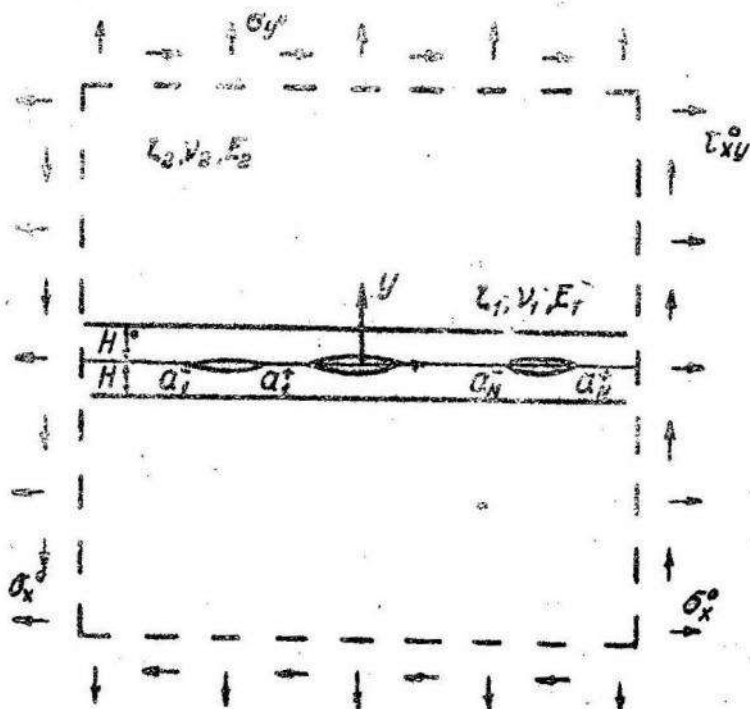


Рис. I.

$$\begin{aligned}\sigma_y^0 &= \frac{1}{2} [\sigma_r^0 + \sigma_z^0 + (\sigma_r^0 - \sigma_z^0) \cos 2\gamma - 2\tau_{rz}^0 \sin 2\gamma], \\ \sigma_z^0 &= \frac{1}{2} [\sigma_r^0 + \sigma_z^0 - (\sigma_r^0 - \sigma_z^0) \cos 2\gamma + 2\tau_{rz}^0 \sin 2\gamma], \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{1}{2} (\sigma_r^0 - \sigma_z^0) \sin 2\gamma + \tau_{rz}^0 \cos 2\gamma,\end{aligned}$$

/I/

причому $\sigma_z^0 = P/2\pi R h^0$, $\sigma_r^0 = \rho R/h^0$, $\tau_{rz}^0 = M/2\pi R^2 h^0$. Зокрема, коли краї труби закриті заглушками і вона знаходиться під впливом лише гідростатичного тиску, то $P = \pi R^2 p$, $M = 0$ і тоді $\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \sigma_z^0 = p$, $\tau_{rz}^0 = 0$.

Пружні постійні смуги /шва/ приймаємо рівними E_1 , ν_1 , μ_1 , пластини /труби/ - E_2 , ν_2 , μ_2 .

Розрізи всередині смуги розташовані вздовж лінії $L' = \bigcup_{\kappa''}^N [\alpha_{\kappa}^-, \alpha_{\kappa}^+]$ і знаходяться під впливом внутрішнього тиску $A\rho$, де $A=0$, якщо розріз моделює зовнішній дефект, та $A=1$ у випадку внутрішнього.

На основі результатів праці [3] неважко показати, що розв'язок поставленої задачі полягає у знаходженні функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, які задовольняють сингулярні інтегральні рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_j(t) dt}{t-x} + \int_{L'} \kappa_j''(x,t) f_j(t) dt = F_j(x) \quad (x \in L', j=1,2). \quad /2/$$

де

$$\{\kappa_j''(x,t), \kappa_j^{2''}(x,t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{q_j^-(\alpha)/q_0^+(\alpha); q_j^+(\alpha)/q_0^-(\alpha)\} \sin \alpha(t-x) d\alpha;$$

$$q_0^\pm(\alpha) = c, d, e^{-2\alpha H} \pm 4\alpha H c, -e^{-2\alpha H};$$

$$q_j^\pm(\alpha) = c_j + d_j + c_j(4\alpha^2 H^2 \pm 4\alpha H - 2d_j e^{-2\alpha H});$$

$$c_j = 1 - e_{2j}/c_{12}, d_j = 1 - e_{2j}/c_{21}; c_{ij} = \mu_i + \mu_j x_i, e_{ij} = \mu_i(1+x_j);$$

$$l_{ij}^+ = 2\mu_j/(1+x_j) = E_j/4; x_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j);$$

$$F_1(x) = \tau_{xy}^0 / l_{11}^+; F_2(x) = (A\rho + \sigma_y^0) / l_{11}^+.$$

Коли ширину смуги спрямувати до безмежності, то отримаємо інтегральні рівняння для системи колінеарних розрізів у безмежній пластині з пружними властивостями зварного шва /2/ при $\kappa_j''(x,t) \equiv 0$. Ці ж рівняння навані, якщо довжина кожного розрізу прямує до нуля.

Коли $H \rightarrow 0$, то маємо подібні рівняння лише у $F_1(x)$ слід L_{11}^+ замінити на L_{12}^+ . Вони описують задачу про щілини у пластинці з пружними властивостями труби.

КІН біля n -ї тріщини всередині зварного шва визначаються співвідношенням

$$K_{1,1}^{(n)} - iK_{2,1}^{(n)} = \pm L_{11}^+ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} [\sqrt{\delta_n} (f_2(x) - if_1(x))], \quad \delta_n = \pm (\alpha_n^+ - x) \quad (x \in L'). \quad /3/$$

Верхній знак беремо, якщо розглядають правий кінець тріщини, і нижній, коли лівий край. КІН біля n -ї щілини у безмежній пластинці з пружними властивостями труби

$$K_1^{(n)} - iK_2^{(n)} = \pm L_{12}^+ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} [\sqrt{\delta_n} (f_2(x) - if_1(x))] \quad /4/$$

Якщо ширину шва спрямувати до нуля та взяти до уваги, що функції $f_j(x)$ мають фізичний сенс похідних отримків переміщень країв розрізу, а отже, при $H \rightarrow 0$ змінюються неперервно, то порівняння формул /3/ і /4/ дає

$$\lim_{H \rightarrow 0} (K_{1,1}^{(n)} - iK_{2,1}^{(n)}) = K (K_1^{(n)} - iK_2^{(n)}), \quad K = L_{11}^+ / L_{12}^+ = E_1 / E_2 \quad /5/$$

Зокрема, для розглянутого у цій роботі навантаження при одній щілині довжини

$$\lim_{H \rightarrow 0} (K_{1,1}^{(n)} - iK_{2,1}^{(n)}) = K \sqrt{a} (A_p + B_y^0 - iT_{xy}^0) \quad /6/$$

Із застосуванням методу ортогональних поліномів [4] здійснено розв'язок рівнянь /2/ для однієї тріщини $L' = [-a, a]$. При обчисленнях вважали $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}$ і досліджували вплив відносної ширини смуги H/a та її відносної жорсткості K на зміну КІН. Результати обчислень, проведених з точністю до 1%, показано на рис. 2, 3. Підтвердився значний вплив на КІН ширини смуги, що моделює зварний шов, і її механічних властивостей. Виявлено, що зі зменшенням H/a при $K > 1$ КІН збільшуються, а при $K < 1$ — зменшуються, причому при меншій жорсткості матеріалу шва КІН не перевищують відповідних

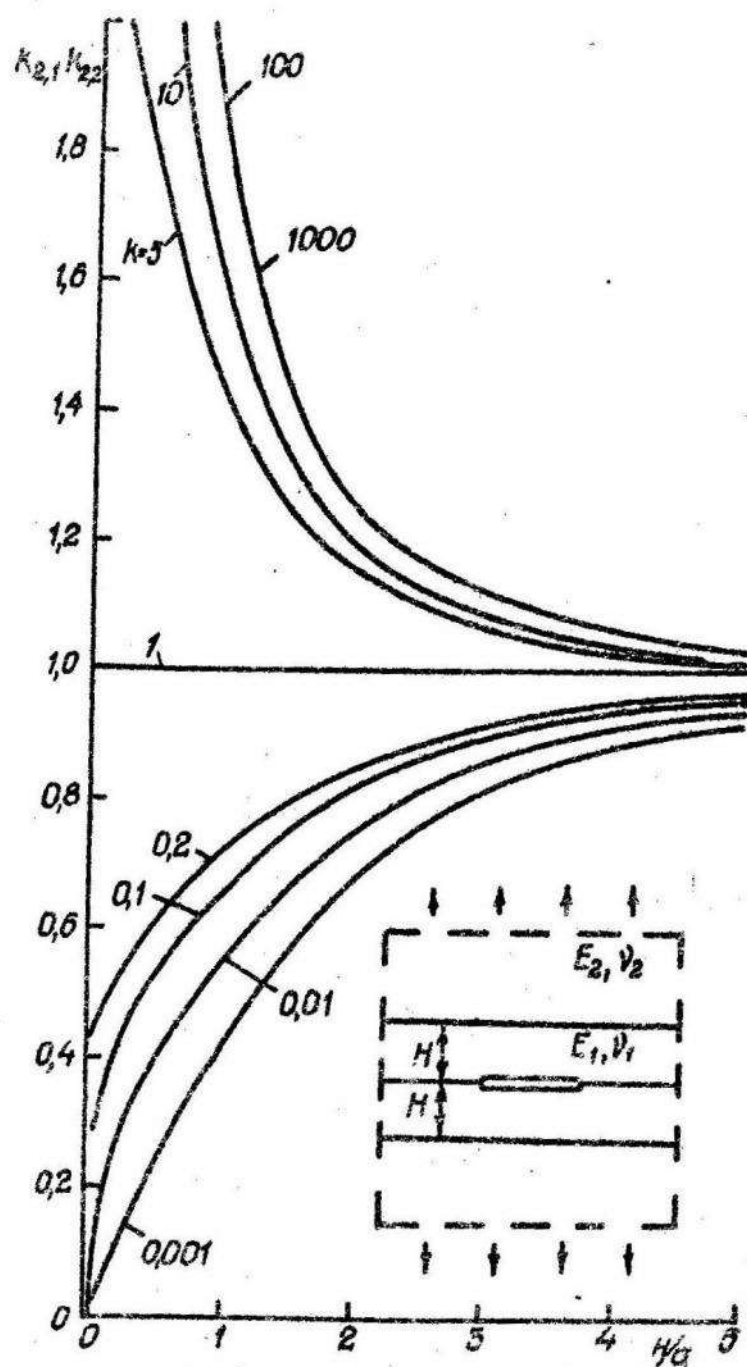


Рис. 2.

значень, отриманих для розрізів у однорідній пластинці. Якщо ж $K > 1$, то K_{11} більші від значень, даних розв'язком для однорідної пластинки, але менші від тих, які визначаються правою частиною співвідношення /6/.

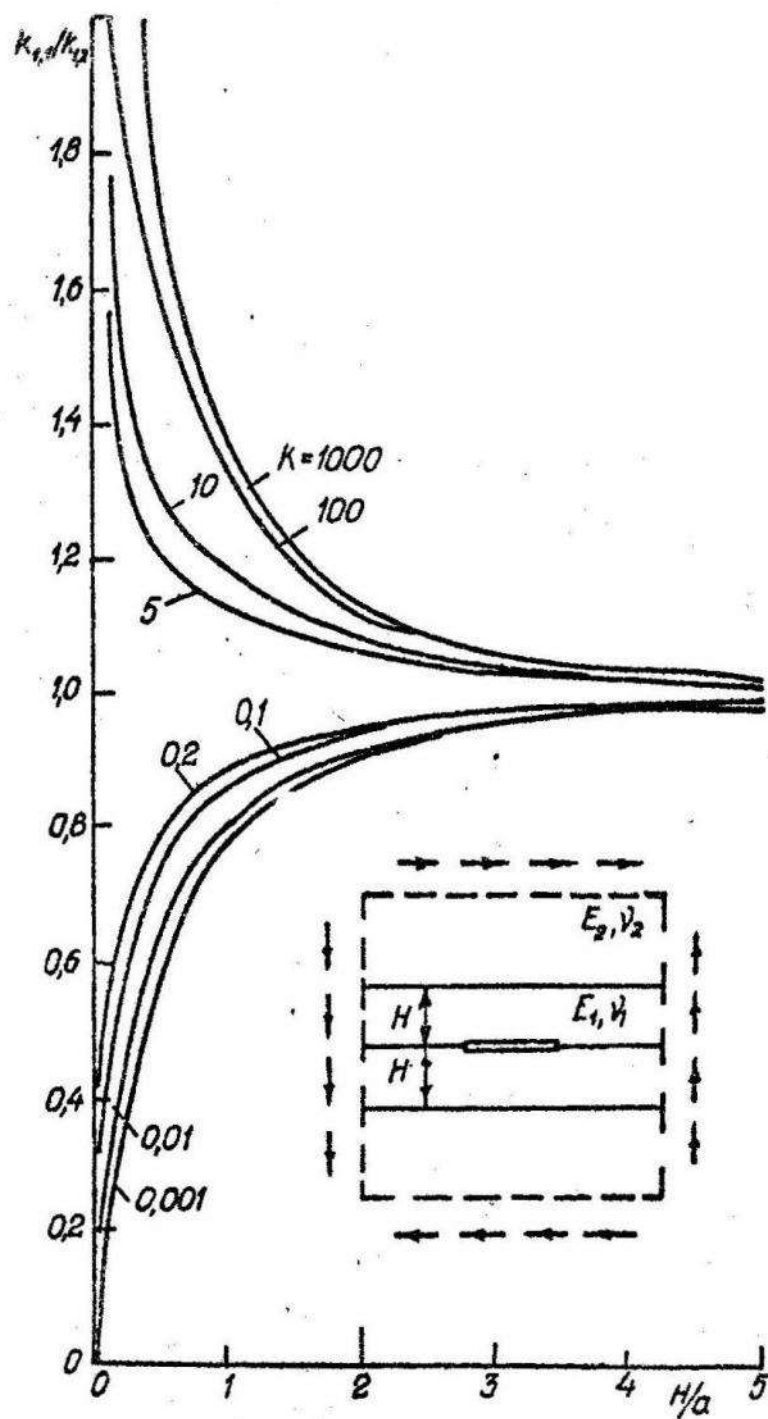


Рис. 3.

Оскільки знайти точну локалізацію дефекту в зварному шві не завжди можливо, то слід вважати за доцільне оцінити зверху значення КІН тріщини у зварному шві за допомогою КІН біля тріщини в однорідній пластинці з пружними характеристиками труби, домножених на коефіцієнт κ^σ

$$K_{2,1}^{(n)} - iK_{2,1}^{(n)} = K^0(K_1^{(n)} - iK_2^{(n)}), \quad K^0 = \max(1, E_1/E_2). \quad /7/$$

Можна припустити, що результати /5/ - /7/ більш точно опишуть граничне значення КІН біля тріщини у зварному шві, якщо під K_1 , K_2 розуміти значення КІН біля тріщини у циліндричній трубі [2].

Отримані результати безпосередньо застосовуються для оцінки міцності шаруватих композитів.

Список літератури: 1. В а с и л ь ч е н к о Г.С., К о ш е - л е в П.Ф. Практическое применение механики разрушения для оценки прочности конструкций. - М.: Наука, 1974. 2. П а н а с ь к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц ь ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976. 3. С у л и м Г.Т., Г р и л и ц к и й Д.В. Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с трещинами. - ФХМ, 1975, т. II, № 5. 4. С у л и м Г.Т., Г р и л и ц к и й Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами. - ФХМ, 1976, т. I2, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 10.03.1980 р.

УДК 536.24

Й.З.Піскозуб, Г.Т.Сулим

ВЛИВ ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ВІД ДИПОЛЯ ТЕПЛА

Розглядаємо плоску стаціонарну задачу теплопровідності без врахування тепловіддачі через бічні поверхні для складеного тіла з тонкостінними прошарками-включеннями на межі розділу компонентів. На осі абсцис $L = L' \cup L''$ декартової системи координат XOY розташована система N симетричних включень малої товщини $2h(x)$, так що $L' = \bigcup_{n=1}^N L_n$, де $L_n = [a_n^-, a_n^+]$ і на торцях включень $h(a_n^\pm) = 0$. Вадомі верхньої L'_2 та нижньої L'_1 границь включень здійснюється

ідеальний тепловий контакт з півплощинами S_2, S_1 , що мають різні теплофізичні властивості та на L' контактують безпосередньо. Задані теплові диполі /дублети [1] / інтенсивності $q_{0\kappa}$ з орієнтацією α_κ у точках $Z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa$ областей S_κ ($\kappa=1,2$) та інтенсивності q_{00} з орієнтацією α_0 у точці $Z_0 = x_0$ на осі деякого включення. Коефіцієнти теплопровідності включень, нижньої та верхньої півплощин дорівнюють відповідно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Необхідно визначити розподіл температури в матриці.

Аналогічна задача при дії потоку тепла та джерел тепла розглянута у працях [4, 5].

Шукане температурне поле $t(z)$ зобразимо [4, 5] у вигляді суперпозиції $t(z) = t_1(z) + t_2(z)$ основного температурного поля $t_1(z)$, яке відповідає задачі для контактуючих півплощин при відсутності включень

$$t_1(z) = -m_\kappa \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{z - z_\kappa} \right] - (n_\kappa - n_l) m_\kappa \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{z - \bar{z}_\kappa} \right] - 2n_l m_l \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_l}}{z - z_l} \right] + t_1^0 \quad /1/$$

$$(z \in S_\kappa; \kappa, l = 1, 2; \kappa \neq l),$$

де $m_j = \frac{q_{0j}}{2\pi\lambda_j}$; $n_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2}$, t_1^0 - постійна, та збуреного температурного поля $t_2(z)$, викликаного наявністю включень. Для визначення скачка $\gamma_2(x)$ поля $t_2(z)$ на включеннях одержане сингулярне інтегродиференціальне рівняння типу Прандтля

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\gamma_2(t)}{t - x} dt - \alpha(x) \gamma_2(x) = F(x), \quad \gamma_2(a_n^\pm) = 0 \quad /2/$$

$$(x \in L', n = \overline{1, N}),$$

де

$$F(x) = (1 - \alpha)g(x) - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1} S(x); \quad \alpha(x) = \frac{x}{h(x)}, \quad x = \frac{\lambda_0}{2n_1\lambda_1};$$

$$g(x) = 2 \sum_{\kappa=1}^2 m_\kappa \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\alpha_\kappa}}{(x - z_\kappa)^2} \right]; \quad s(x) = \frac{4\lambda_0 m_0 h(x)(x - x_0) \cos \alpha_0}{[(x - x_0)^2 + h'(x)]^2}.$$

Якщо скачок $\gamma_2(x)$ відомий, то поле $t_2(z)$ визначається формулами /10/ [5] чи /3/ [4]. З рівняння /2/ випливають аналітичні зв'язки у часткових випадках теплоізованих / $\lambda_0 = 0$ / і теплопровідних / $\lambda_0 = \infty$ / включень [4, 5].

Для прикладу розглядаємо одне вклучення, розташоване вздовж відрізка $L' = [-a, a]$, коли $h(x) = h_0 [1 - (\frac{x}{a})^2]^{1/2q}$, ($q \geq 1$). Скористаємося розкладом [4, 5]

$$T_2'(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{p=1}^{\infty} A_p T_p(\frac{x}{a}), T_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{p} U_{p-1}(\frac{x}{a}), \quad /3/$$

коефіцієнти якого визначають із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\pi}{2} A_{k+1} + \alpha_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_p H_{pk}^q = F_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad /4/$$

де

$$H_{pk}^q = \frac{\pi \Gamma(2\nu)}{p 4^\nu} \sum_{l=1}^q \frac{(-1)^{l+1} \sin(p_l \pi)}{\Gamma(1+\nu+p_l) \Gamma(\nu-p_l)}; \quad F_k = \int_{-1}^1 F(at) \sqrt{1-t^2} U_{k-1}(t) dt;$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi a}{h_0}; \quad \nu = 1 - \frac{1}{2q}; \quad 2p_l = k - (-1)^l p \quad (l = 1, 2) \dots$$

Введемо коефіцієнт інтенсивності потоку тепла /КІПТ/ - аналог коефіцієнта інтенсивності напружень у задачах антиплоскої деформації [2]. Якщо для розглянутого вклучення застосувати "принцип мікроскопа" [6], тобто ввести полярну систему координат (z, θ) у кінцях вклучення $z(z \pm a) = z e^{i\theta}$ і скористатись асимптотичним виразом /22.5/ [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{T_2'(t)}{t-z} dt = \mp T_2'(x) \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{x=za} / \sqrt{2a z e^{i\theta}} + O(1), \quad /5/$$

то з закону Фур'є можна одержати в околі кінців вклучення наступну асимптотичну поведінку складових q_s теплового потоку в напрямі і температури:

$$\{q_x, q_y, q_z\} = \frac{\kappa q}{\sqrt{2z}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right\} + O(1),$$

$$t = \frac{\sqrt{2z}}{\lambda \kappa} \kappa q \sin \frac{\theta}{2} + O(z^{1/2}), \quad /6/$$

де $\kappa q = \pm W^\pm / \sqrt{2}$, $W^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm a} \sqrt{1 \pm a - x} \lambda \kappa T_2'(x)$ ($\kappa = 1, 2$).

Зазначимо, що верхні знаки позначають КІПТ в околі правого кінця виключення, а нижні – лівого. Значення індекса κ відповідає півплощині, в якій визначається КІПТ.

Використовуючи /3/, маємо

$$\kappa q = \pm \frac{\sqrt{a}}{2} \lambda_{\kappa} \sum_{p=1}^{\infty} (\pm 1)^p A_p \quad (\kappa=1,2). \quad /7/$$

Числовий розв'язок системи рівнянь /4/ проведено на ЕОМ ЕС-1022 для однорідної площини $\lambda_1 = \lambda_2$ / при різних значеннях параметрів $q, \lambda = \lambda_0/\lambda_1, z_{\kappa} = x_{\kappa} + iy_{\kappa}$ ($\kappa=1,2$) . Для дослідження ІХ-ної точності при $|x| \leq 0,95a$ у найнесприятливішому випадку прямокутного / $q = \infty$ / абсолютно теплопровідного / $\lambda = \infty$ / виключення при $|y_{\kappa}| \geq 0,5a$ доцільно обмежитися першими 100 відмінними від нуля коефіцієнтами розкладу /3/. Відзначимо, що скачок $\delta_2(x)$ та КІПТ не зміняться, якщо диполь орієнтації α_{κ} у точці z_{κ} замінити на диполь орієнтації $\alpha_{\kappa} + \pi$ у точці $\bar{z}_{\kappa}$.

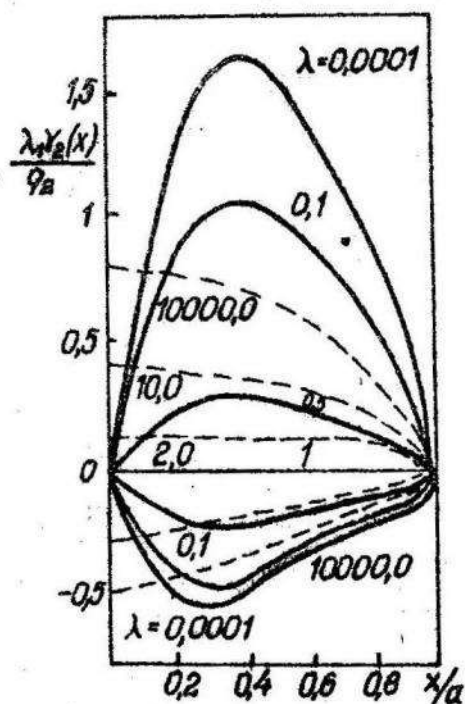


Рис. 1.

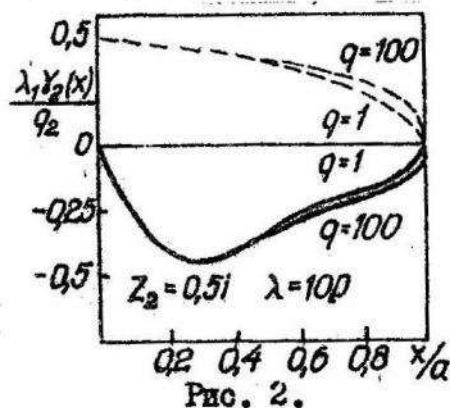


Рис. 2.

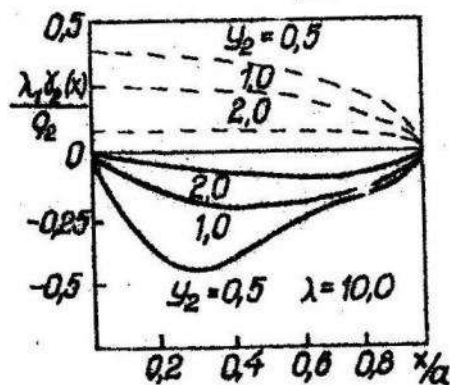


Рис. 3.

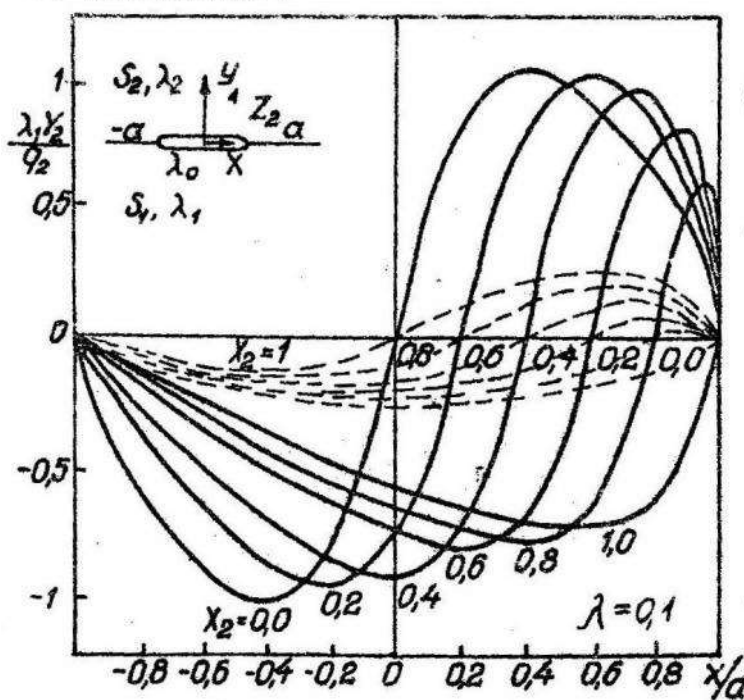


Рис. 4.

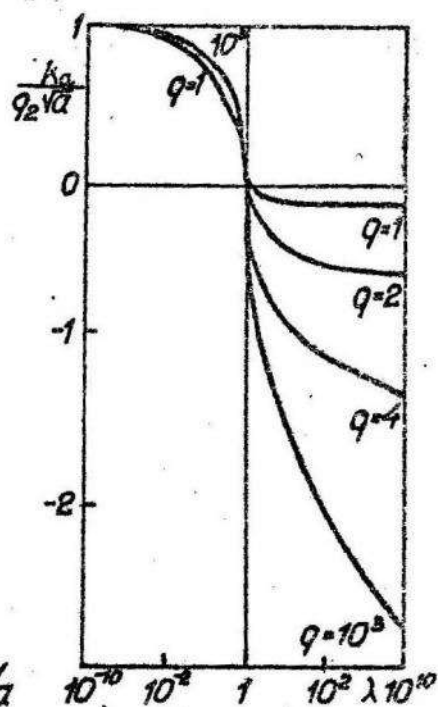


Рис. 5.

На рис. 1 зображена зміна скачка $\gamma_2(x)$ залежно від зміни параметра λ при $q=2$ і $z_K=i$. Рис. 2 ілюструє вплив форми включення на $\gamma_2(x)$. Залежність $\gamma_2(x)$ від ординати розміщення диполя y_K показана на рис. 3, а від абсциси x_K – на рис. 4. Суцільними лініями на рисунках зображені результати отримані для диполя орієнтації $\alpha_K=0$ / $\gamma_2^0(x)$ /, пунктирними – для орієнтації $\alpha_K=\frac{\pi}{2}$ / $\gamma_2^{\pi/2}(x)$ /, де $\gamma_2^{\alpha}(x)$ – більш деталізоване означення скачка температури для диполя орієнтації α . Зрозуміло, що при довільній орієнтації

$$\gamma_2^{\alpha}(x) = \gamma_2^0(x) \cos \alpha + \gamma_2^{\pi/2}(x) \sin \alpha. \quad /3/$$

При віддаленні диполя від початку координат його вплив на скачок температури на включенні зменшується набагато сильніше, ніж у випадку джерела [4]. На рис. 5 зображено залежність КПП від параметрів λ і q .

Список літератури: 1. Каролоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. 2. Кит Г.С. Про аналогії між позовжним зсувом і стаціонарною теплопровідністю тіл з вклученнями та тріщинами. - ДАН УРСР, сер. А, 1977, № 4. 3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. 4. Пісозуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив лінійного вклучення на температурне поле від джерела тепла. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 16. 5. Сулим Г.Т. Влияние формы тонкого линейного вклучения на температурное поле в кусочно-однородной пластине. - ИЖ, 1979, 37, № 6. 6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974.

Стаття надійшла в редколегію 11.03.1980 р.

УДК 622.831

Т.Л.Мартинович, М.І.Задворняк

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНОМУ МАСИВІ З ВИРОБКОЮ

За допомогою методів лінійної теорії пружності розглядаємо другу основну задачу для вагомого анізотропного масиву з горизонтальною циліндричною виробкою, проведеною на глибині H від донної поверхні L_0 . Нормальний переріз виробки обмежений простим замкнутим контуром L , який описується рівнянням

$$x + iy = R(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta}), \quad \sum_{k=1}^N k |C_k|^2 < 1.$$

Віднесемо гірський масив до декартової системи координат x, y, z /рис. 1/. У кожній точці анізотропного масиву є площина пружної симетрії паралельна координатній площині xy , яка суміщена з нормальним перерізом горизонтальної виробки.

Напруження у нерозробленому масиві обчислюють за формулами

$$\sigma_x^0 = \lambda \gamma(y-H), \quad \sigma_y^0 = \gamma(y-H), \quad \tau_{xy}^0 = 0, \quad /1/$$

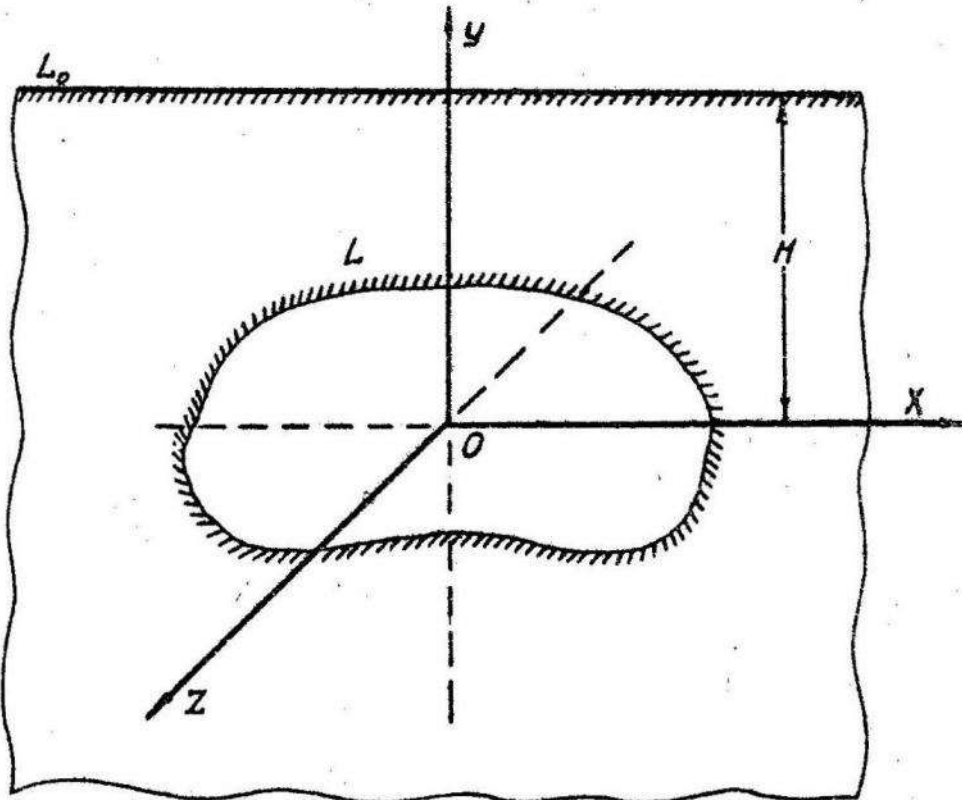


Рис. I.

де $\lambda = -A_{12}/\beta_{11}$ - коефіцієнт бокового розпору; γ - середня питома вага породи; β_{ij} - пружні постійні середовища Σ .

Комплексні потенціали $\varphi_j(z_j)$ ($j=1,2$), що описують додатковий напружений стан, який прямує до нуля в міру віддалення від виробки, знаходимо в граничних умов

$$\begin{aligned} \int_L F(t) dV &= \int_L F(t) d(u+iv) - 2ib \int_L F(t)(y-H) dy, \\ \int_L \overline{F(t)} dV &= \int_L \overline{F(t)} d(u+iv) - 2ib \int_L \overline{F(t)}(y-H) dy, \end{aligned} \quad /2/$$

Д е х н и ц к и й С.П. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. - Сборник трудов ВНИИ, 1962, т.45.

$$\text{де } \gamma = \sum_{j=1}^2 [(P_j + iQ_j) \gamma_j(z_j) + (\bar{P}_j + i\bar{Q}_j) \bar{\gamma}_j(\bar{z}_j)] ; \quad \theta = \sum_{n=2}^N (\beta_n \beta_{12} - \beta_{12}^2) ;$$

$F(t)$ - довільна голоморфна функція у нескінченній області зовні L , включаючи контур; $z_j = x + \mu_j y$ - ускладнені комплексні змінні.

Нехай функція, яка конформно відображає зовнішність одиничного кола $\gamma (|\xi| \geq 1)$ на зовнішність контура L , має вигляд

$$z = \omega(\xi) = R(\xi + \sum_{k=1}^N C_k \xi^{-k}), \quad \omega'(\xi) \neq 0 \quad \text{при } |\xi| \geq 1. \quad /3/$$

У перетворених областях ($|\xi_j| \geq 1$) комплексні потенціали запишемо як

$$\gamma_j(\xi_j) = D_j \ln \xi_j + \sum_{k=1}^N a_{kj} \xi_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj} \xi_j^{-k}, \quad (j=1,2), \quad /4/$$

$D_j (j=1,2)$ визначаються з умови однозначності переміщень.

Довільну функцію, використану при написанні граничних умов /2/, зобразимо у вигляді ряду

$$F[\omega(\xi)] = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \xi^{-n}. \quad /5/$$

Із міркувань, що функції $\gamma_j(z_j) (j=1,2)$ повинні бути обмеженими зовні одиничного кола і виходячи з граничних умов /2/, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів комплексних потенціалів

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 [(P_j + iQ_j) A_{nj} + (\bar{P}_j + i\bar{Q}_j) \bar{A}_{nj}] &= -\frac{1}{2\kappa i n} \int \sigma^n d(u+iv) - \\ &- \frac{i\theta}{2\kappa} \gamma_{nn} + H\theta G_n, \\ \sum_{j=1}^2 [(\bar{P}_j + i\bar{Q}_j) \bar{A}_{nj} + (P_j + iQ_j) A_{nj}] &= \frac{1}{2\kappa i n} \int \sigma^n d(u+iv) + \\ &+ \frac{i\theta}{2\kappa} \bar{C}_{n-1} + H\theta \bar{Q}_n, \\ \gamma'_{jj}(\xi_j^{(i)}) &= 0 \quad (n=1,2,\dots,\infty; i=1,\dots,N-1; j=1,2), \end{aligned} \quad /6/$$

де

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= R(1 - \frac{R}{\bar{R}} C_1), \quad G_1 = -\bar{R}(1 - \frac{R}{\bar{R}} C_1); \\ \bar{Q}_n &= -\bar{R} \bar{C}_n, \quad G_n = R C_n \quad (n=2,3,\dots,N); \end{aligned}$$

$$\varepsilon_n = \sum_{k=1}^n K g_k \varepsilon_{n-k+1} + \sum_{k=1}^n K g_k \varepsilon_{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} K g_{n-k+1} G_k;$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} K g_k G_{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n-2} K G_k G_{n-k+1} - \sum_{k=1}^n K g_{n-k+1} G_k;$$

$$\varepsilon_n = 0 \text{ при } n > 2N-1; \quad \gamma_n = 0 \text{ при } n > 2N+1;$$

$\xi_j^{(n)}$ — нулі функції $z_j'(\xi_j) = \omega_j'(\xi_j)$, причому $|\xi_j^{(n)}| > 1$.

Для прикладу розглянуто породу алевроліт з такими пружними характеристиками:

$$E_1 = 6.21 \cdot 10^5 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \quad E_2 = 5.68 \cdot 10^5 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};$$

$$G = 2.29 \cdot 10^5 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \quad \nu_1 = 0.215; \quad \nu_2 = 0.260. \quad /7/$$

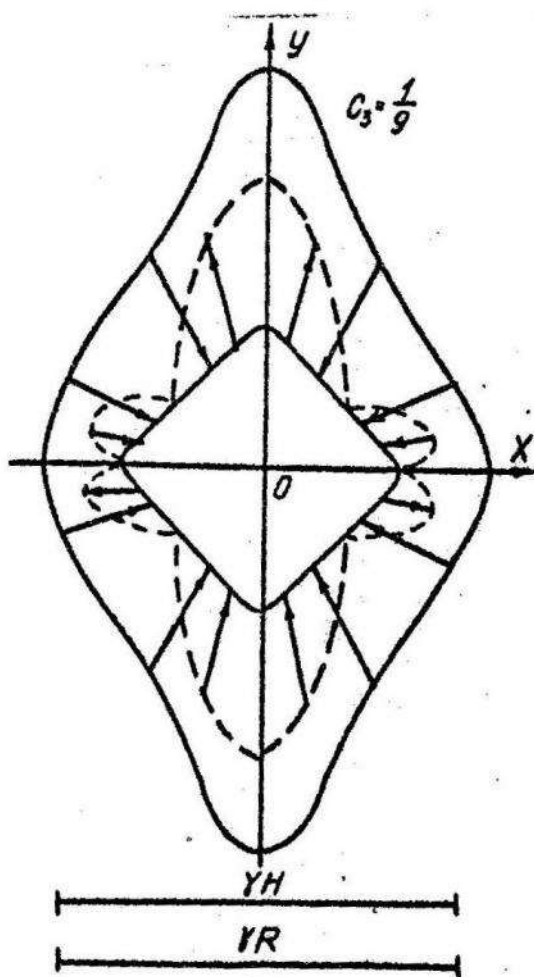


Рис. 2.

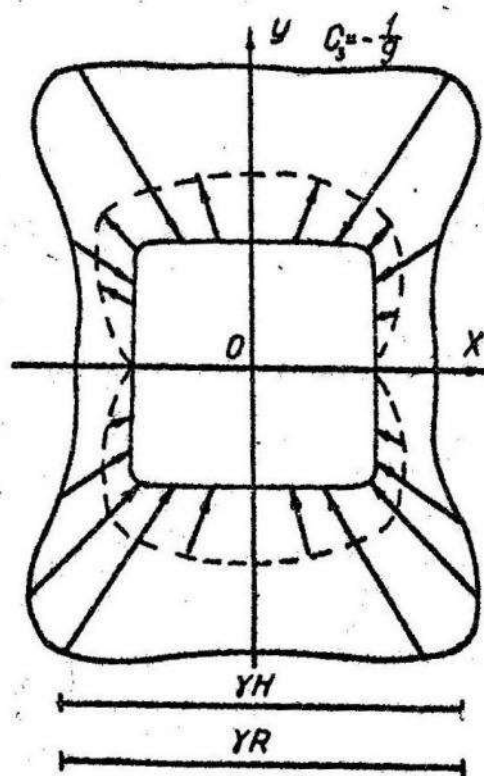


Рис. 3.

На рис. 2, 3 показано розподіл напружень σ_θ на поверхні квадратної виробки / $N=3$; $c_1=0$; $c_2=0$; $c_3=\pm 1/9$ / у випадку абсолютно жорсткого ядра. Суцільною лінією зображені напруження у частках δH , пунктиром – у частках δR .

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1980 р.

УДК 624.07:534.1

Б.І.Гайвась, В.М.Фарат

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ СТИСНУТОГО КОНСОЛЬНОГО КОНІЧНОГО СТЕРЖНЯ З МАСОЮ

Розглядаємо пружний консольний стержень жорсткості $EJ(x)$ і маси $m(x)$ при дії сліdkуючої сили H та консервативної G на вільному кінці. Зосереджена маса M , розміщена у точці x , /рис. 1/. Дослідження малих коливань стержня зводиться до такої кра-

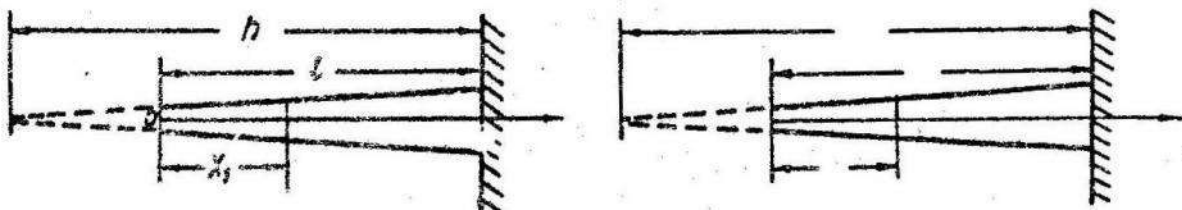


Рис. 1.

йової задачі:

$$[f(x)y'']'' + \rho y'' - \omega^2 g(x)y = \sum_{q=1}^n \omega^2 \gamma_q y^{(q-1)}(x_i) \delta_q(x-x_i), \quad /1/$$

$$[f(x)y'']' + \rho(1-\delta)y' = 0, \quad f(x)y'' = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad /2/$$

$$y = y' = 0 \quad \text{при} \quad x=l,$$

$$\text{де} \quad \omega^2 = \frac{m_0 \Omega^2 l^4}{E J_0} \quad ; \quad \rho = \frac{H l^2}{E J_0} \quad ; \quad \Omega \quad - \text{частота};$$

$$\gamma_q = \frac{m_i}{m_0 l^4}; \quad \gamma_{q1} = \frac{J_i}{m_0 l^4}; \quad H = G + H; \quad m_0 = m(l); \quad J_0 = J(l).$$

I_p - момент інерції зосередженої маси; γ - параметр неконсервативності; $\sigma_q(x)$ - q -та похідна функції Хевісайда $\sigma_0(x)$

$$f(x) = [(1-\alpha) + \alpha x]^4, \quad g(x) = [(1-\alpha) + \alpha x]^2, \quad \alpha = \frac{1}{h}.$$

Розв'язок рівняння /1/ шукаємо у вигляді ряду [1]

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \omega^{2n}. \quad /3/$$

На невідомі функції $y_n(x)$ ($n = 0, 1, 2 \dots$) накладаємо такі умови:

$$[f(x)y_0'']'' + \rho y_0'' = 0, \quad /4/$$

$$f(x)y_0'' + \rho(1-\gamma)y_0' = 0, [f(x)y_0'']' = 0 \text{ при } x=0, \quad /5/$$

$$[f(x)y_n'']'' + \rho y_n'' = g(x)y_{n-1} + \sum_{q=1}^2 \gamma_q y_{n-1}^{(q-1)}(x) \sigma_q(x-x_1), \quad /6/$$

$$f(x)y_n'' = [f(x)y_n'']' = y_n' = y_n = 0 \text{ при } x=0. \quad /7/$$

При цьому $y(x)$ задовольняє рівняння /1/ і умови на вільному кінці.

Розв'язок задачі /4/ - /5/ має вигляд

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^1 C_k \Phi_{k0}(x), \quad /8/$$

$$\text{де } \Phi_{00}(x) = \delta x + \frac{(1-\delta)(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha x)}{\gamma\rho} \sin \frac{\sqrt{\rho} x}{(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha x)}, \quad /9/$$

$$\Phi_{10}(x) = 1.$$

Розв'язки y_n задачі /6/ - /7/ визначаються через попередні y_{n-1} за допомогою співвідношення

$$y_n = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_0^x \psi(x, \tau) g(\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau + \sum_{q=1}^2 \gamma_q y_{n-1}^{(q-1)}(x, x-1) \int_0^{x-x_1} [\psi_\tau^{(q-1)}(x, \tau)] \tau \sigma_q(x-x_1) d\tau \right\}, \quad /10/$$

де $\psi(x, \tau)$ - функція впливу [3] однорідного диференціального

рівняння /6/, причому

$$\psi(x, \xi) = (x - \xi) - \frac{(1 - \alpha + \alpha x)(1 - \alpha + \alpha \xi)}{\gamma \rho} \sin \frac{\sqrt{\rho}(x - \xi)}{(1 - \alpha + \alpha x)(1 - \alpha + \alpha \xi)} \quad /11/$$

Тоді з врахуванням умов /7/ і співвідношення /8/ маємо

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^1 c_k \varphi_{kn}(x) \quad /12/$$

У розв'язок /10/ входять значення $y_n^{(q-1)}(x_1)$, які запишемо у вигляді

$$y_n^{(q)}(x_1) = \sum_{k=0}^1 c_k A_{2k}^n \quad /13/$$

де $A_{2k}^n = y_n^{(2)}(x_1) / c_k = \delta_{jk}$, δ_{jk} - символ Кронекера. Легко показати [4], що розв'язки $y^{(2)}(x)$ ($i=0,1$) неперервні при $x=x_1$. Тому

$$A_{2k}^n = \frac{1}{\rho} \int_0^{x_1} \psi_x^{(2)}(x, \xi) g(\xi) \varphi_{kn-1}(\xi) d\xi, \quad /14/$$

$$\varphi_{kn}^{(2)}(x) = \frac{1}{\rho} \left\{ \int_0^x \psi_x^{(2)}(x, \xi) g(\xi) \varphi_{kn-1}(\xi) d\xi + \right.$$

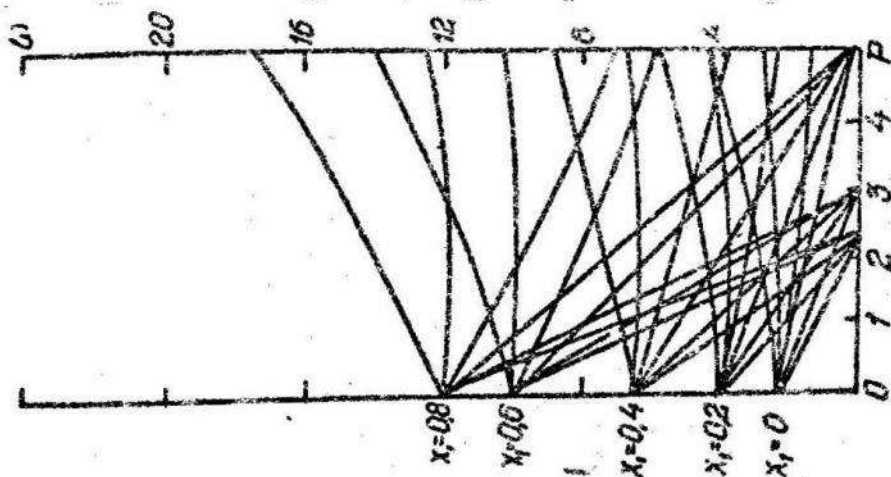
$$\left. + \sum_{q=1}^2 \eta_q A_{q-1k}^{n-1} (-1)^{q-1} [\psi_{\xi}^{(q-1)}(x, \xi)]_{x/\xi=x_1} \varphi_0(x, x_1) \right\}. \quad /15/$$

Маючи вирази для $\varphi_{kn}^{(2)}(1)$, легко отримати характеристичне рівняння у вигляді

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \omega^{2m} = 0, \quad /16/$$

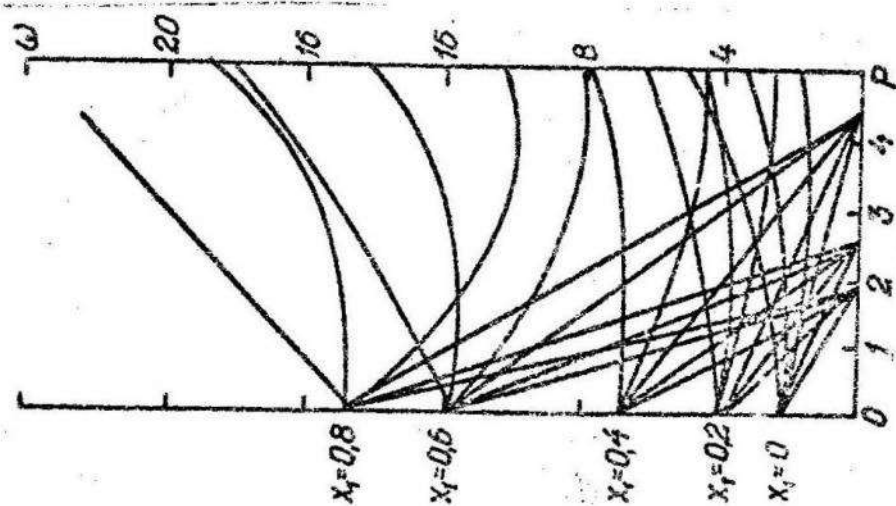
$$\text{де } A_m = \sum_{k=0}^m [\varphi_{0m-k}^{(1)}(1) \varphi_{1k}^{(1)}(1) - \rho \varphi_{0m-k}^{(1)}(1) \varphi_{1k}^{(1)}(1)]. \quad /17/$$

Якщо є коефіцієнти характеристичного ряду, можна обчислити методом двосторонніх оцінок частоту коливань конічного стержня та критичні параметри навантаження.



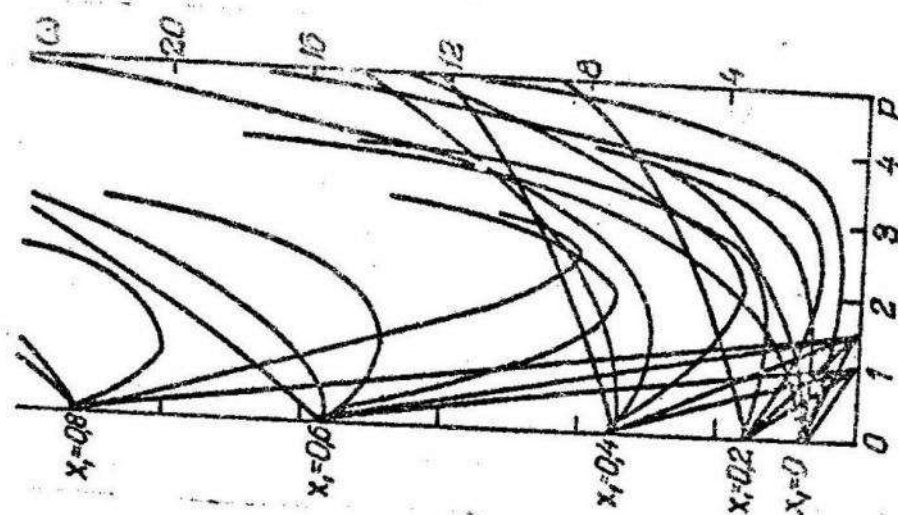
$\alpha = 0.1$

Рис. 2.



$\alpha = 0.2$

Рис. 3.



$\alpha = 0.5$

Рис. 4.

На рис. 2-4 дано залежності частот ω від параметрів конусності μ , неконсервативності γ і точки X , прикладення зосередженої маси. Кожен пучок кривих залежності частот від параметрів відповідає одному значенню X , точки прикладення зосередженої маси в множині $\{0(0,2) 0,8\}$. Пучки від нижнього до верхнього побудовані у порядку зростання цих значень. Криві в кожному пучку від нижньої до верхньої побудовані для значень параметрів неконсервативності γ від 0 до 1 з кроком 0,2 відповідно при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$.

Список літератури: 1. Б а й д а к Д.А., З о р і й Л.М. Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок. - ДАН УРСР, сер. А., 1972, № 6. 2. З о р і й Л.М. К розвитку аналітичних методів дослідження задач динаміки упругих і гідроупругих систем. - Математические методы и физико-механические проблемы, 1978, № 7. 3. З о р і й Л.М. Про новий метод побудови загальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. - ДАН УРСР, сер. А, 1979, № 5. 4. О б р а з ц о в И.Ф., О н а н о в Г.Г. Строительная механика скрученных тонкостенных систем. - М.: Машиностроение, 1973.

Стаття надійшла в редакцію 08.01.1980 р.

З М І С Т

Сеньо Н.С. Стійкість одного ітераційно-різницевого методу для розв'язування нелінійних операторних рівнянь.....	3
Сеньо Н.С., Шахно С.М. Розв'язування різнице- вих рівнянь газової динаміки ітераційним методом типу Рун- ге.....	7
Шахно С.М. Про один метод розв'язування різнице- вих рівнянь газової динаміки.....	14
Щербина Ю.М. Про один рекурсивний ітераційний метод із збуреннями для операторних рівнянь.....	16
Жук М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Кан- торовича для нелінійних інтегральних рівнянь.....	21
Дудзяний І.М., Москвяк Є.В. Визначення параметрів розподілу деяких процесів руйнування.....	24
Барвінський А.Ф., Дудзяний І.М. Про власні коливання в системах з розподіленими параметрами, що описуються одним нелінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку.....	28
Остудін Б.А., Пасічник Р.М., Рома- нук Т.Т. Про наближений розв'язок деяких двовірних інте- гральних рівнянь Фредгольма першого роду.....	34
Мартиненко Марія Д., Мартиненко Ми- хайло Д., Шипка Й.Г. Про одне узагальнення теореми Шмідта на випадок бігармонічних потенціалів.....	35
Бакалець В.А., Коваль Н.Є. Метод неозна- чених коефіцієнтів розв'язування граничних задач для бігармо- нічного рівняння.....	36
Квіт І.Д. Максимальна властивість ентропії узагал- неного розподілу Вейбула.....	37
Прокопішин І.А., Хлебніков Д.Г. Набли- жене визначення температурних напружень в екранному вузлі кі- нескопа з плоским екраном.....	43
Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Про можливість нехтування різницею радіусів волокон криволінійної труби при її розрахунку.....	55

Мокрик Р.І., Паздерський Ю.А., Кочубей В.Ф., Гутор І.М., Олійник І.В. Стационарний теплообмін при русі газу між двома співосними круговими циліндрами.....	60
Мокрик Р.І., Олійник І.В. Фундаментальні розв'язки термов'язкопружності для псевдоколивань.....	65
Опанасович В.К., Драган М.С. Антиплоска деформація тіла з тонкостінним пружним включенням.....	69
Лихачов В.О., Флейшман Н.П. Про розв'язок рівнянь теорії пружності для анізотропного шару.....	74
Сулим М.В., Сулим Г.Т. Про міцність зварних з'єднань трубопроводів.....	76
Пісковуб Й.З., Сулим Г.Т. Вплив лінійного включення на температурне поле від диполя тепла.....	82
Мартинович Т.Л., Задворняк М.І. Дослідження напружень в анізотропному масиві з виробкою...	87
Гайвась Б.І., Фарат В.М. Дослідження коливань стиснутого консольного конічного стержня з масою...	91

УДК 518:517.948

Устойчивость одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений. С е н ь о П.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 3-6 /на укр. яз./.

Предложен разностный аналог обобщенного метода А.Островского. Доказана высокая сходимость этого метода и устойчивость его по отношению к возмущениям разного типа. Получен конкретный вид таких возмущений. Показана связь предложенного метода с итерационными методами типа Рунге четвертого порядка сходимости. Список лит.: 6 назв.

УДК 518:517.9:533.7

Решение разностных уравнений газовой динамики итерационным методом типа Рунге. С е н ь о П.С., Ш а х н о С.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 7 - 14 /на укр. яз./.

Доказано, что при ненамного более жестких ограничениях на шаг сетки по времени, чем для метода Ньютона, рассмотренный метод имеет третий порядок сходимости. Приведены результаты численных расчетов. Список лит.: 5 назв.

УДК 518:517.9:533.7

Об одном методе решения разностных уравнений газовой динамики. Ш а х н о С.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 14 - 15 /на укр. яз./.

Для решения разностных уравнений газовой динамики предлагается использовать метод порядка сходимости $1+\sqrt{2}$, позволяющий использовать относительно "грубые" сетки по времени. Обсуждаются результаты численных расчетов. Список лит.: 2 назв.

УДК 518:517.948

Об одном рекурсивном итерационном методе с возмущениями для операторных уравнений. Щ е р б и н а Ю.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Численные методы анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 16 - 21 /на укр.яз./.

Рассматривается итерационный метод со вложенными итерациями для решения нелинейных операторных уравнений. Исследовано влияние погрешностей округления на порядок сходимости метода. Список лит.: 4 назв.

УДК 518.517.3

Исследование скорости сходимости метода Канторовича для нелинейных интегральных уравнений. К у к М.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 21 - 23 /на укр. яз./.

Доказана теорема, устанавливающая существование и сходимость решения приближенной системы нелинейных интегральных уравнений, полученной согласно метода Канторовича примененного к соответствующему нелинейному интегральному уравнению.

УДК 519.21

Определение параметров распределения некоторых процессов разрушения. Д у д з я н и й И.М., М о с к в я к Е.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 24 - 27 /на укр.яз./.

Предложена методика определения параметров распределения некоторых процессов разрушения. Для решения задачи использован градиентный метод минимизации функционала. Список лит.: 2 назв.

УДК 534.111

О собственных колебаниях в системах с распределенными параметрами, которые описываются одним нелинейным уравнением с частными производными второго порядка. Б а р в и н с к и й А.Ф., Д у д з я н и й И.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 28 - 33 /на укр. яз./.

Строится асимптотическое решение слабонелинейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа, которое содержит смешанные производные. Коэффициенты уравнения считаются медленно переменными. Список лит.: 9 назв.

УДК 518.517.948

О приближенном решении некоторых двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. О с т у д и н Б.А., П а с и ч - н и к Р.М., Р о м а н ю к Т.Т. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 34 - 38 /на укр. яз./.

Задача расчета электростатического поля, образованного поверхностями типа эллиптического цилиндра, формулируется в виде двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Последнее решается с использованием метода саморегуляризации. Для представления неизвестной плотности применяется билинейная аппроксимация. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.944:947

Об одном обобщении теоремы Шмидта на случай бигармонических потенциалов. М а р т ы н е н к о М а р и я Д., М а р т ы н е н к о М и х а и л Д., Ш и п к а И.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 39 - 41 /на укр. яз./.

Дается дальнейшее развитие исследований Шмидта на случай бигармонических потенциалов. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.949.8

Метод неопределенных коэффициентов решения краевых задач для бигармонического уравнения. Б а к а л е ц В.А., К о в а л ь Т.Е. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 41 - 45 /на укр. яз./.

Рассматривается точный метод решения краевых задач для бигармонического уравнения на плоскости в случае гладких замкнутых кривых второго или четвертого порядка, когда правая часть уравнения является полиномом произвольной степени. Метод реализован на алгоритмическом языке, приведены численные результаты. Список лит.: 2 назв.

УДК 519.21

Максимальное свойство энтропии обобщенного распределения Вейбулла. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 45 - 49 /на укр. яз./.

Доказывается теорема о том, что со всех абсолютно непрерывных распределений, заданных на положительной части действительной оси, имеющих одинаковые соответствующие начальные моменты и одинаковые первые логарифмические моменты, обобщенное распределение Вейбулла имеет наибольшую энтропию. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3

Приближенное определение температурных напряжений в экранном узле кинескопа с плоским экраном. П р о к о п и ш и н И.А., Х л е б н и к о в Д.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 49 - 55 /на укр. яз./.

Методом тригонметрических рядов Фурье определены температурные напряжения в трехпластинчатой системе, моделирующей экранный узел кинескопа с плоским экраном. Влияние продольных перемещений на напряжения исследовано для одномерного случая. Приведены численные результаты в виде графиков. Ил. 3. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3:681.3.097

О возможности пренебрежения разностью радиусов волокон криволинейной трубы при ее расчете. К о п и т к о М.Ф., С а в у л а Я.Г. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 55 - 60 /на укр. яз./.

Показано, что при решении задачи статики трубчатой оболочки путем минимизации функционала Лагранжа методом конечных элементов нельзя пренебрегать разностью радиусов волокон срединной поверхности. Ил. 3. Список лит.: 5 назв.

УДК 539.3

Стационарный теплообмен при движении газа между двумя соосными круговыми цилиндрами. Мокрик Р.И., Паздерский Ю.А., Кочубей В.Ф., Гутор И.М., Олиарник И.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. /на укр. яз./.

Рассматривается задача теплопроводности для установившегося течения вязкого газа, который движется между двумя полубесконечными соосными круговыми цилиндрами с заданной температурой. При помощи преобразования Лапласа получено выражение для температурного поля в области занятой газом. Список лит.: 4 назв.

УДК 539.3

Фундаментальные решения термовязкоупругости для псевдоколебаний. Мокрик Р.И., Олиарник И.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 65 - 69 /на укр. яз./.

Получена матрица фундаментальных решений для псевдоколебаний термовязкоупругих сред, в частности для моделей Бюссесона, Кельвина, Максвелла. Установлено важные свойства фундаментальных решений, в основе которых лежат свойства характеристических параметров термовязкоупругости, как многозначных функций комплексной переменной. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.311

Антиплоская деформация тела с тонкостенным упругим включением. Опанасович В.К., Драган М.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 69 - 73 /на укр. яз./.

Исследуется задача об антиплоской деформации тела с тонкостенным упругим включением. Приведены формулы для определения напряженно-деформированного состояния в окрестности концов включения, а также дан численный анализ задачи. Ил. 3. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3

О решении уравнений теории упругости для анизотропного тела.
Лихачов В.Н., Флейшман Н.П. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 74 – 76 /на укр. яз./.

Решение граничных задач для упругого слоя произвольной анизотропии выражено через функции напряжения Максвелла. Показано, что их определение в пространстве изображений сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от упругих постоянных материала.

УДК 539.3+4+4.:621.81

О прочности сварных соединений трубопроводов. Сулим М.В., Сулим Г.Т. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 76 – 82 /на укр. яз./.

Рассматривается плоская задача теории упругости для полосы с коллинеарными разрезами, подкрепленной двумя идентичными полукосостями, при действии однородного поля нормальных и касательных напряжений на бесконечности. На основе метода ортогональных многочленов исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от геометрических и механических параметров задачи. Результаты применимы для оценки прочности сварных соединений тонких цилиндрических оболочек, а также слоистых композитов. Ил. 3. Список лит.: 4 назв.

УДК 536.24

Влияние линейного включения на температурное поле от диполя тепла. Пискозуб И.З., Сулим Г.Т. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 82 – 87 /на укр. яз./.

Рассматривается плоская стационарная задача теплопроводности без учета теплоотдачи через боковые поверхности для составного тела с тонкостенными прослойками на границе раздела материалов. Заданы диполи тепла в полуплоскостях и на оси одной из прослоек. Решение задачи методами теории функций комплексной переменной сведено к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению. Определен скачок возмущенного температурного поля на включениях. Введено новое понятие коэффициента интенсивности теплового потока. Ил. 5. Список лит.: 6 назв.

УДК 622.831

Исследование напряжений в анизотропном массиве с выработкой.
Мартинovich Т.Л., Задворняк М.И. - Вестн. Львов.
ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов:
Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 87 - 91 /на укр. яз./.

Исследуется концентрация напряжений в анизотропной весомой среде возле цилиндрической криволинейной выработки. С помощью методов теории функций комплексной переменной задача сведена к системе алгебраических уравнений. Приведены численные значения для случая, когда в отверстие выработки вставлено абсолютно жесткое ядро. Ил. 3.

УДК 624.07:534.1

Исследование колебаний сжатого консольного конического стержня с массой. Гайвась Б.И., Фараф В.М. - Вестн. Львов.
ун-та, сер. мех.-мат., вып. 17. Численные методы анализа. Львов:
Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 91 - 95 /на укр. яз./.

Методом характеристических рядов исследовано влияние на частоту колебаний конического стержня параметров конусности, неконсервативности в зависимости от точки размещения сосредоточенной массы. Ил. 4. Список лит.: 4 назв.

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая. Выпуск 17

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

(на украинском языке)

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения «Вища школа»

Редактор *В. В. Войтович*. Художний редактор *В. В. Ковальчук*.
Технічний редактор *А. А. Степанюк*. Коректор *Т. Т. Козак*

Підп. до друку 20.01.81. БГ 01614. Формат 60×84/16. Папір друк. № 3.
Офс. друк. 6,04 умовн. друк. арк. 4,86 обл.-вид. арк. Тираж 600 прим.
Вид. № 838. Зам. № 3330. Ціна 60 коп. Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті видавничого
об'єднання «Вища школа», 290000, Львів, вул. Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в спра-
вах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі, 290000, Львів,
вул. Стефаника, 11.

60 коп.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981, вип. 17. 1—104.