УДК 517.946

С.П.Лавренюк

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ НУЛЬОВОГО РОЗВ"ЯЗКУ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо рівняння коливання пластинки

$$u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + \alpha u_t = -f(u), \qquad /1/$$

шарнірно опертої на краях

$$u(t,0) = u(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0,$$

в області

$$\Omega = \{(t,x): 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1\}. \qquad /2/$$

У праці [1] наведено умови існування єдиного класичного розв"язку рівняння /1/, який задовольняє умови /2/ і початкові умови

$u|_{t=0} = a(x),\ u_t|_{t=0} = b(x)$ як при фіксованому T, так і при будь-якому $t>0$.

Нехай $f(0)=0$, тобто рівняння /1/ має тривіальний розв"язок $u=0$. Мета нашої роботи - встановлення одного критерію асимптотичної стійкості в цілому нульового розв"язку задачі /1/, /2/ відносно міри

$$\rho(t) = \left(\int_0^1 (u_{xx}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Означення 1. Нульовий розв"язок задачі /1/, /2/ називається стійким відносно міри $\rho(t)$, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що $\rho(t)\le\varepsilon$, $t\in[0,T]$ як тільки $\rho(0)\le\delta$.

Означення [illegible] Нульовий розв"язок задачі /1/, /2/ асимптотично стійкий в цілому відносно міри $\rho(t)$ якщо:

1/ він стійкий для $T=\infty$;

2/ всі розв"язки задачі /1/, /2/, для яких $\rho(0)$ обмежене, залишаються обмеженими в міру ρ для всіх $t \geq 0$ /$\rho(t)$ обмежене/ і прямують до нуля при $t \to \infty$ $(\rho(t) \to 0,\ t \to \infty)$.

Позначимо через $U(t,x)$ вектор-функцію

$$U(t,x) = (u(t,x),\quad u_t(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x)),$$

де $u(t,x)$ – розв"язок задачі /I/, /2/.

<u>Теорема стійкості</u> [3.] Нехай існує функціонал $W[U(t,x)] = V(t)$, диференційований по t вздовж кожного розв"язку $U(t,x)$ задачі /I/, /2/, такий, що $W(0)=0$:

а/ $W[U]$ додатно визначений, тобто існує неперервна неспадна функція ω_1, коли $\omega_1(0)=0$ для всіх $t \geq 0$ і $U \neq 0$.

$$0 < \omega_1(\rho(t)) \leq V(t),\ \omega_1(\rho) \to \infty \text{ при } \rho \to \infty;$$

б/ існує неперервна функція ω_2 така, що $\omega_2(0)=0$ і похідна $\dot V(t)$ вздовж $U(t,x)$ задовольняє для всіх $t \geq 0$ і $U \neq 0$ нерівність

$$\dot V(t) \leq -\omega_2(\rho(t)) < 0;$$

в/ існує неперервна неспадна функція ω_3 така, що $\omega_3(0)=0$ і для всіх $t \geq 0$,

$$V(t) \leq \omega_3(\rho(t)).$$

Тоді нульовий розв"язок задачі /I/, /2/ асимптотично стійкий в цілому.

Розглянемо функціонал

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + (u_t + \alpha u)^2 + \alpha^2 u^2 + 2\int_0^{u(t,x)} f(\xi)\,d\xi]\,dx.$$

Вздовж розв"язків задачі /I/, /2/

$$\dot V(t) = -\alpha \int_0^1 [u_{xx}^2 + \beta u_x^2 + u_t^2 + uf(u)]\,dx.$$

Теорема. Якщо $f(0)=0;\ zf(z)>0;\ z\neq 0;\ \beta<\pi^2$ і $\alpha>0$, то нульовий розв"язок задачі /1/, /2/ асимптотично стійкий в цілому.

Доведення. Покажемо, що побудований функціонал /3/ задовольняє всі умови теореми стійкості. Перш за все

$$V(t)\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1[u_{xx}^2-\beta u_x^2+(u_t+\alpha u)^2+\alpha^2u^2]\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1[u_{xx}^2-\beta u_x^2+\frac{u_t^2}{2}]\,dx.$$

Далі, використовуючи нерівності [2]

$$\int_0^1 u_{xx}^2\,dx\geqslant\pi^2\int_0^1 u_x^2\,dx,\quad \int_0^1 u_x^2\,dx\geqslant\pi^2\int_0^1 u^2\,dx,$$

справедливі для розв"язків задачі /1/, - /2/, легко показати, що при

$$\beta<\pi^2,\quad V(t)\geqslant K_1\rho^2(t).$$

Аналогічно можна довести, що $\dot V(t)\leqslant-\alpha K_2\rho^2(t)$.

Позначимо через $h(|u|)$ функцію

$$h(|u|)=\max\left\{\int_0^u f(\xi)\,d\xi,\ \int_0^{-u} f(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Очевидно, $h(0)=0$. Тоді $V(t)\leqslant K_3\rho^2(t)+h(|u|)$.

Але для розв"язків задачі /1/, /2/ справедливі нерівності

$$|u(t,x)|\leqslant\int_0^1|u_x(t,x)|\,dx\leqslant\left(\int_0^1 u_x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho(t).$$

Отже

$$V(t)\leqslant K_3\rho^2(t)+h(\rho)=\omega_3(\rho(t)).$$

Таким чином, всі умови теореми стійкості виконуються, що і потрібно було довести.

Список літератури: 1. Лавренюк С.П. Існування і єдиність розв"язку нелінійного рівняння коливання пластинки. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16. 2. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. – Прикладная математика и механика, 1959, т.23, вып. 3. 3. Caughey T.K, Ellison J. Existence, Uniqueness and Stability of Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential Equations.– J. of Math. Anal. and Applic, 1975, v.51.

Стаття надійшла в редколегію 1.09.1978 р.

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо рівняння коливання пластинки

$$\mathcal{L}u = u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + 2\alpha u_t = f(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}), \qquad /1/$$

шарнірно опертої на краях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \qquad /2/$$

при початкових умовах

$$u\big|_{t=0} = a(x), \quad u_t\big|_{t=0} = b(x) \qquad /3/$$

в безрозмірних координатах в області

$$\Omega = \{(t,x):\ 0 \le t \le T,\ \ 0 \le x \le 1\}.$$

Припустимо, що сталі α і β задовольняють умови $\alpha > 0$, $\beta < \pi^2$. Мета нашої роботи – дослідження умов існування і єдиності класичного розв"язку задачі /1/ – /3/ як при скінченому t, так і при довільних T.