Список літератури: 1. Л а в р е н ю к С.П. Існування і єдиність розв"язку нелінійного рівняння коливання пластинки. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16. 2. М о в ч а н А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. – Прикладная математика и механика, 1959, т.23, вип. 3. 3. *Caughey T.K, Ellison J. Existence, Uniqueness and Stability of, Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential, Equations.-J. of Math. Anal. and Applic, 1975, v 51.*

Стаття надійшла в редколегію 109.1978 р.

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо рівняння коливання пластинки

$$\mathcal{L}u = u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + 2\alpha u_t = f(t,x,u,u_x,u_t,u_{xx}), \qquad /1/$$

шарнірно опертої на краях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \qquad /2/$$

при початкових умовах

$$u\big|_{t=0} = a(x), \quad u_t\big|_{t=0} = b(x) \qquad /3/$$

в безрозмірних координатах в області

$$\Omega = \{(t,x):\ 0 \le t \le T,\quad 0 \le x \le 1\}.$$

Припустимо, що сталі α і β задовольняють умови $\alpha > 0$, $\beta < \pi^2$. Мета нашої роботи – дослідження умов існування і єдиності класичного розв"язку задачі /1/ – /3/ як при скінченому t, так і при довільних T.

Введемо клас функцій

$$B_0=\{u(t,x): u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}, u_{txxx}, u_{xxxx}, u_{xxxxx}\in C(\Omega)\}.$$

Через B позначимо поповнення простору B_0 по нормі

$$\|u\|=|u|_m+|u_x|_m+|u_t|_m+|u_{xx}|_m+|u_{xt}|_m+|u_{tt}|_m+|u_{xxx}|_m+|u_{txx}|_m+|u_{xxxx}|_m+|u_{xtt}|_{Lm}+|u_{txxx}|_{Lm}+|u_{xxxxx}|_{Lm},$$

де

$$|g(t,x)|_m=\max_{\Omega}|g(t,x)|;\ |g(t,x)|_{Lm}=\max_{[0,T]}\left(\int_0^1 g^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введемо також норму u, яка залежить від t, за формулою

$$\|u\|_1=|u|_{m_1}+|u_x|_{m_1}+|u_t|_{m_1}+|u_{xx}|_{m_1}+|u_{xt}|_{m_1}+|u_{tt}|_{m_1}+|u_{xxx}|_{m_1}+|u_{txx}|_{m_1}+|u_{xxxx}|_{m_1}+|u_{xtt}|_L+|u_{txxx}|_L+|u_{xxxxx}|_L,$$

де

$$|g(t,x)|_{m_1}=\max_{0\le x\le 1}|g(t,x)|,\ |g(t,x)|_L=\left(\int_0^1 g^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$\mathcal{L}u=\mathcal{F}(t,x) \qquad /4/$$

при умовах /2/, /3/. Позначимо через $\omega^2=\min\{1, 1-\frac{\beta}{\pi^2}\}$ і припустимо для спрощення викладу, що $\alpha<\pi^2\omega$. Тоді розв"язок задачі /4/ – /3/ можна зобразити у вигляді

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha t}a_n\cos\delta_n+\varphi_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{b_n+\alpha a_n}{\delta_n}\sin\delta_n t\,\varphi_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{\delta_n}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\mathcal{F}_n(\tau)\sin\delta_n(t-\tau)d\tau, \qquad /5/$$

де $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$; $\delta_n^2 = n^2\pi^2(n^2\pi^2-\beta)-\alpha^2$;

$$a_n = \int_0^1 a(x)\varphi_n(x)\,dx,\quad b_n = \int_0^1 b(x)\varphi_n(x)\,dx,\quad \mathcal{F}_n(t) = \int_0^1 \mathcal{F}(t,x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Введемо простір функцій

$$M = \{u(t,x):\ u\in B,\ u(t,0)=u(t,1)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,1)=0,$$
$$u(0,x)=a(x),\ u_t(0,x)=b(x)\}.$$

Запишемо лему, доведення якої можна легко одержати, виходячи з формули /5/.

Л е м а . Рівняння /4/ має розв"язок $u(t,x)\in M$, зображений формулою /5/, причому існують такі додатні сталі K_1 , K_2 , які залежать від α і β , що

$$\|u\|_1 \le K_1 e^{-\alpha t}(|a_{xxxxx}|_{L_2} + |b_{xxx}|_{L_2} + |\mathcal{F}_x(0,x)|_{L_2}) +$$
$$+ K_2[(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \int_0^1 \mathcal{F}_{xxx}^2(\tau,x)\,dx)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ (\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \int_0^1 \mathcal{F}_{tx}^2(\tau,x)\,dx)^{\frac{1}{2}}], \qquad /6/$$

$$\|u\| \le K_1(|a_{xxxxx}|_{L_2} + |b_{xxx}|_{L_2} + |\mathcal{F}_x(0,x)|_{L_2} +$$
$$+ K_2[(\int_0^T d\tau \int_0^1 \mathcal{F}_{xxx}^2(\tau,x)\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T d\tau \int_0^1 \mathcal{F}_{tx}^2(\tau,x)\,dx)^{\frac{1}{2}}], \qquad /7/$$

коли виконуються умови:

1/ $\mathcal{F}_{xx}(t,x), \mathcal{F}_t(t,x)$ - абсолютно неперервні по x при всіх $t\in[0,T]$; $\mathcal{F}(t,x)$ - абсолютно неперервна по t майже при всіх $x\in[0,1]$;

2/ існують $\int_0^T\int_0^1 \mathcal{F}_{xxx}^2(t,x)\,dt\,dx,\ \int_0^T\int_0^1 \mathcal{F}_{tx}^2(t,x)\,dt\,dx$;

3/ $\mathcal{F}(t,0)=\mathcal{F}(t,1)=\mathcal{F}_{xx}(t,0)=\mathcal{F}_{xx}(t,1)=0;$

4/ існують $\int_0^1 |a_{xxxxx}|^2 dx,\ \int_0^1 |b_{xxx}|^2 dx;$

5/ $a(0)=a(1)=0;\ a_{xx}(0)=a_{xx}(1)=0;$

$a_{xxxx}(0)=a_{xxxx}(1)=0;\ b(0)=b(1)=0;\ b_{xx}(0)=b_{xx}(1)=0.$

Розглянемо множину

$$M_1(h)=\{u: u\in M, \|u\|\le h\}.$$

Вважаємо, що функція $f(t,x,u,u_x,u_t,u_{xx})$ задовольняє умову $A1$, якщо:

а/ функція $\mathcal{F}(t,x)=f(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_t(t,x),u_{xx}(t,x))$ задовольняє умову I/ леми для кожної $u\in M_1$;

б/ $|\mathcal{F}_{xxx}|_{L_m},\ |\mathcal{F}_{tx}|_{L_m} \le \frac{1}{2} L_1 h$ для кожної $u\in M_1$;

в/ $|\mathcal{F}_{1,xxx}-\mathcal{F}_{2,xxx}|_{L_m},\ |\mathcal{F}_{1,tx}-\mathcal{F}_{2,tx}|_{L_m}\le \frac{1}{2} L_2(h)\|u_1-u_2\|$, для всіх $u_1, u_2\in M_1$,

де

$$\mathcal{F}_i(t,x)=f(t,x,u_i(t,x),u_{i,x}(t,x),u_{i,t}(t,x),u_{i,xx}(t,x)),\quad i=1,2.$$

Зауваження I. Відомо*, що для кожної $u(t,x)\in B$, $u_{xxxx}(t,x), u_{txx}(t,x), u_{tt}(t,x)$ абсолютно неперервні по x при всіх $t\in[0,T]$. Отже, умови а/, б/, в/ можуть бути виконані.

---

* Caughey T.K., Ellison J. Existence Uniqueness and Stability of Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential Equations - J. of Math. Anal. and Applic, 1975, v 51.

Теорема I. Нехай η довільне число, $0<\eta<1$, а f, a, b задовольняють умови:

а/ функція f задовольняє умову $A1$;

б/ $\mathcal{F}(t,0)=\mathcal{F}(t,1)=\mathcal{F}_{xx}(t,0)=\mathcal{F}_{xx}(t,1)=0$;

в/ $K_1(|a_{xxxxx}|_L+|b_{xxx}|_L+|\mathcal{F}_x(0,x)|_L)\leqslant K_3$;

г/ $a(0)=a(1)=0;\ a_{xx}(0)=a_{xx}(1)=0,\ a_{xxxx}(0)=a_{xxxx}(1)=0;$
$b(0)=b(1)=0;\ b_{xx}(0)=b_{xx}(1)=0.$

Тоді:

I/ якщо $K_3\leq\eta h,\ \sqrt{T}<\min\left\{\frac{h(1-\eta)}{K_2L_1},\frac{1}{K_2L_2}\right\}$, то існує єдиний класичний розв"язок задачі /I/ – /3/ для всіх $t\in[0,T]$;

2/ коли $K_3+\frac{K_2L_1}{\alpha}\leq h,\ \frac{K_2L_2}{\alpha}<1$, то існує єдиний класичний розв"язок задачі /I/ – /3/ в M_1 при довільному $T>0$.

Для доведення цієї теореми вводимо оператор A, який діє в просторі M_1 за формулою, що дається правою частиною /5/. При умовах теореми цей оператор переводить простір M_1 в себе і є стискуючим, з чого і випливає твердження теореми.

Розглянемо тепер клас функцій

$$M_2(h,\alpha)=\{u:\ u\in M,\ \|u\|_1\leqslant he^{-\frac{\alpha}{2}t}\}.$$

У цитованій уже нами праці – показано, що M_2 – повний простір. Функція $f(t,x,u,u_x,u_t,u_{xx})$ задовольняє умову $A2$, якщо:

а/ функція $\mathcal{F}(t,x)=f(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_t(t,x),u_{xx}(t,x))$ задовольняє умову I/ леми для кожної $u\in M_2$;

б/ $|\mathcal{F}_{xxx}|_L,\ |\mathcal{F}_{tx}|_L\leqslant\frac{1}{2}L_3\|u\|_1^{1+\varepsilon},\quad\forall u\in M_2$;

в/ $|\mathcal{F}_{1,xxx}-\mathcal{F}_{2,xxx}|_L,\ |\mathcal{F}_{1,tx}-\mathcal{F}_{2,tx}|_L\leqslant\frac{1}{2}L_4\|u_1-u_2\|_1,$
$\forall u_1,u_2\in M_2$.

Теорема 2. Нехай η довільне число, $0<\eta<1$, і f, a, b задовольняють умову $A2$ та умови 2/, - 4/ теореми I. Якщо

$$K_3 \leq \eta h, \; \max\left\{\eta + \frac{K_2 L_3 h^{\varepsilon}}{\varepsilon}, \frac{K_2 L_4}{\alpha}\right\} < 1,$$

то існує єдиний класичний розв"язок задачі /I/ - /3/ в M_2 при довільному $T>0$.

Зауваження 2. Умова $A2$ означає, що $u \equiv 0$ є розв"язком рівняння /I/, а будова M_2 дає змогу стверджувати асимптотичну стійкість нульового розв"язку задачі /I/ - /3/.

Стаття надійшла в редколегію I.09.1978 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу в області $\bar{V}_T = \{-\infty < x < \infty, \; 0 \leq t \leq T\}$.

$$\varepsilon^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \qquad /I/$$
$$+ d(x,t)u = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр; $n>2$ - натуральне число. Випадок $n=2$ розглянуто у праці [4].

Методом М.Й.Вішика - Л.А.Люстерніка [I] побудуємо асимптотичний до деякого порядку N розклад розв"язку задачі /I/, /2/.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1/ $a(x,t) \geq \theta > 0, \; c(x,t) \geq \theta > 0, \; d(x,t) \geq \theta > 0, \; |b(x,t)| < c(x,t)a(x,t)$ в $\bar{V}_T$;