Теорема 2. Нехай η довільне число, $0<\eta<1$, і f, a, b задовольняють умову $A2$ та умови 2/, - 4/ теореми I. Якщо

$$K_3 \leq \eta h, \max\left\{\eta + \frac{K_2 L_3 h^{\varepsilon}}{\varepsilon}, \frac{K_2 L_4}{\alpha}\right\} < 1,$$

то існує єдиний класичний розв"язок задачі /I/ - /3/ в M_2 при довільному $T>0$.

Зауваження 2. Умова $A2$ означає, що $u \equiv 0$ є розв"язком рівняння /I/, а будова M_2 дає змогу стверджувати асимптотичну стійкість нульового розв"язку задачі /I/ - /3/.

Стаття надійшла в редколегію I.09.I978 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу в області $\bar{V}_T = \{-\infty < x < \infty,\ 0 \leq t \leq T\}$.

$$\varepsilon^n\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2(x,t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) + \varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial U}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right) + d(x,t)U = f(x,t), \qquad /I/$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр; $n > 2$ - натуральне число. Випадок $n = 2$ розглянуто у праці [4].

Методом М.Й.Вішика - Л.А.Люстерніка [I] побудуємо асимптотичний до деякого порядку N розклад розв"язку задачі /I/, /2/.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1/ $a(x,t) \geq \theta > 0,\ c(x,t) \geq \theta > 0,\ d(x,t) \geq \theta > 0,\ |b(x,t)| < c(x,t)a(x,t)$ в $\bar{V}_T$;

2/ $f(x,t)$, $d(x,t)\in C^{N+2}(\bar{V}_T)$, $a(x,t)$, $b(x,t)\in C^{N+1}(\bar{V}_T)$,

$c^2(x,t)\in C^{\max(2,N+1)}(\bar{V}_T)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^{N+1}(R^1)$ і

похідні, які існують, обмежені в $\bar{V}_T$ і R^1.

Особливістю цієї задачі є наявність двох примежових шарів в околі $t=0$. Аналогічна ситуація вперше проаналізована у праці [2] для менш загального рівняння, крім того там же [2] розглянута змішана задача.

Розклад розв"язку задачі /1/, /2/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(x,\eta)+R_N(x,t,\varepsilon), \quad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\eta=t/\varepsilon^{n-1}$ – регуляризуючі перетворення, функції $\bar{u}_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ визначаються далі; $R_N(x,t,\varepsilon)$ – залишковий член.

Регулярна частина асимптотики $\bar{u}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)$ визначається за допомогою рівнянь

$$\bar{u}_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{d(x,t)},\quad \bar{u}_i(x,t)=-\frac{1}{d(x,t)}\Big[\Big(a(x,t)\frac{\partial\bar{u}_{i-1}}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial\bar{u}_{i-1}}{\partial x}\Big)+ \quad /4/$$
$$+\Big(\frac{\partial^2\bar{u}_{i-n}}{\partial t^2}-c^2(x,t)\frac{\partial^2\bar{u}_{i-n}}{\partial x^2}\Big)\Big] \quad (i=1,\dots,N).$$

Тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функції з від"ємним індексом тотожно дорівнюють нулеві. Функції $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /4/ і, взагалі кажучи, не задовольняють жодну з умов /2/.

Ряди $\Pi(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)$ і $Q(x,\eta,\varepsilon)=\varepsilon^{n-2}\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(x,\eta)$

повинні сумісно з $\bar{u}(x,t,\varepsilon)$ задовольнити умови /2/.

Задачі для знаходження $\Pi_i(x,\tau)$ і $Q_i(x,\eta)$ визначаються згідно з стандартною процедурою [1].

$\Pi_i(x,\tau)$ / $i=0,\dots,N$ / визначаються як розв"язки задач

$$a(x,0)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+d(x,0)\Pi_i=\pi_i(x,\tau). \quad /5/$$

$\Pi_0(x,0)=\varphi(x)-\bar{u}_0(x,0),\ \Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0)-Q_{i-n+2}(x,0)\ (i=1,\dots,N)$,

де $\Pi_i(x,\tau)$ легко виписати в явному вигляді. Вони залежать від $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ та їхніх похідних, $\pi_0(x,\tau)\equiv 0$.

$Q_i(x,\eta)$ $(i=0,\dots,N)$ визначаються як розв"язки задач

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2}+a(x,0)\frac{\partial Q_i}{\partial \eta}=\xi_i(x,\eta),$$

$$\frac{\partial Q_0(x,0)}{\partial \eta}=-\frac{\partial \Pi_0(x,0)}{\partial \tau},\ \frac{\partial Q_1(x,0)}{\partial \eta}=-\frac{\partial \Pi_1(x,0)}{\partial \tau}-\frac{\partial \bar{u}_0(x,0)}{\partial t}+\psi(x),$$
$$\frac{\partial Q_i(x,0)}{\partial \eta}=-\frac{\partial \Pi_i(x,0)}{\partial \tau}-\frac{\partial \bar{u}_{i-1}(x,0)}{\partial t}\ (i=2,\dots,N),\ Q_i(x,\eta)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}0, \qquad /6/$$

де $\xi_i(x,\eta)$ легко виписати в явному вигляді. Вони залежать від $Q_j(x,\eta)$ $(j<i)$ та їхніх похідних, $\xi_0(x,\eta)\equiv 0$.

Отже, $\Pi_i(x,\tau)$ і $Q_i(x,\eta)$ визначаються як розв"язки певних задач для звичайних диференціальних рівнянь / x відіграє роль параметра/. Добре видно, що після того, як знайдені всі $\bar{u}_i(x,t)$ / $i=0,\dots,N$ / з /4/, $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ / $i=0,\dots,N$ / дістаємо рекурентно з /5/, /6/ у порядку $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(x,\eta)$, $\Pi_1(x,\tau)$, $Q_1(x,\eta)$ і т.д.

Методом математичної індукції доведено, що $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ / $i=0,\dots,N$ / - суть функції типу примежового шару [2].

Для залишкового члена $R_N(x,t,\varepsilon)$ методом інтегралів енергії [1] доведено, що в кожному характеристичному трикутнику K_T з $\bar{V}_T$ наявна оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(K_T)}=O(\varepsilon^{N+1/2}), \qquad /7/$$

що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови I/, 2/, тоді розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичне зображення 3/, де $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються з /4/, функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ є розв"язками відповідно задач /5/ і /6/, а для залишкового члена $R_N(x,t,\varepsilon)$ в $\bar{V}_T$ існує /7/.

Список літератури: I. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Успехи математических наук, 1977, № 3. 2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи математических наук, 1957, № 5. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром. – У кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. Київ, 1978.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Нехай Ω_0 – одноозв"язна обмежена область $R^n (n \geq 2)$ з границею $\partial\Omega_0$ /припущення про гладкість наведемо далі/. У циліндрі $D_T: \{\Omega_0 \times [0,T]\}$ розглянемо змішану задачу для гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,t)u = f(x,t) \quad x=(x_1,\dots,x_n), \qquad /1/$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u(x,t)\Big|_\Gamma = 0 \quad \Gamma: \{\partial\Omega_0 \times [0,T]\}. \qquad /2/$$