Теорема. Нехай виконуються умови I/, 2/, тоді розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичне зображення 3/, де $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються з /4/, функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ є розв"язками відповідно задач /5/ і /6/, а для залишкового члена $R_N(x,t,\varepsilon)$ в $\bar{V}_T$ існує /7/.

Список літератури: I. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Успехи математических наук, 1977, № 3. 2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи математических наук, 1957, № 5. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром. – У кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. Київ, 1978.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Нехай Ω_0 – одноэв"язна обмежена область $R^n (n \geq 2)$ з границею $\partial\Omega_0$ /припущення про гладкість наведемо далі/. У циліндрі $D_T: \{\Omega_0 \times [0,T]\}$ розглянемо змішану задачу для гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,t)u = f(x,t) \quad x = (x_1,\dots,x_n), \qquad /1/$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u(x,t)\big|_\Gamma = 0 \quad \Gamma: \{\partial\Omega_0 \times [0,T]\}. \qquad /2/$$

Методом М.Й.Вішика-Л.А.Люстерніка [1] побудуємо асимптотичний до деякого порядку $N>0$ розклад розв"язку задачі /1/, /2/.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1/ для будь-якого $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R_1^n(x,t)\in D_T$ існують

$$\nu_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \nu_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

де $\nu_1,\ \nu_2;\ \mu_1,\ \mu_2$ – додатні постійні;

2/ в D_T існують неперервні похідні $D_x^m D_t^k b_{ij}, D_x^m, D_t^k b_i$, $D_x^m D_t^k b$, $D_x^m D_t^k f$ $\left(m+k\le 2(N+1)+\left[\frac{n+1}{2}\right]+3\right)$, $D_x^t\ D_t^k a_{ij}$ $/m+k\le 2N+\left[\frac{n+1}{2}\right]+3$ /, де тут і далі $D_x^m D_t^k\alpha\equiv$

$$\equiv\frac{\partial^{m+k}\alpha(x,t)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}\partial t^k}\qquad\left(m=\sum_{i=1}^{n}m_i\right);$$

3/ границя $\partial\Omega_0$ така, що локально зображається у вигляді $x_i=h(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, причому існують і неперервні похідні вигляду $D_x^{m+\left[\frac{n+1}{2}\right]+5}$ / $m\le 2(N+1)$ /;

4/ $D_x^m D_t^k f(x,0)\big|_{\Gamma}=0\left(m+k\le 2(N+1)+\left[\frac{n+1}{2}\right]+3,\ k\le N+4+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$.

Зауважимо, що, з огляду на припущення 1/, рівняння /1/ – гіперболічне [4], а вироджене рівняння / $\varepsilon=0$ / – рівномірно параболічне [5].

Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,\tau)+\varepsilon^{N+1}Z_N(x,\tau,\varepsilon),\qquad /3/$$

де $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ – регуляризуюче перетворення, функції $\bar{u}_i(x,t), v_i(x,\tau)$ визначаємо відповідно з першого та другого ітераційних процесів, описаних нижче; $Z_N(x,t,\varepsilon)$ – нев"язка.

У першому ітераційному процесі наближений розв"язок рівняння /1/ шукаємо у вигляді $\bar{u}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)$. Підставляючи вираз для $\bar{u}(x,t,\varepsilon)$ в /I/ і зрівнюючи члени з однаковими степенями ε, одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial x_i}+b(x,t)\bar{u}_p=f_p(x,t)\ (p=0,\dots,N), \quad /4/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t),\ f_p(x,t)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 \bar{u}_{p-1}}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial^2 \bar{u}_{p-1}}{\partial t^2}\ (p=1,\dots,N).$

Умови, при яких визначаються функції $\bar{u}_p(x,t)$, сформулюємо трохи далі.

У другому ітераційному процесі наближений розв"язок рівняння /I/ /однорідного/ шукаємо у вигляді $v(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,\tau).$ В однорідному рівнянні /I/ проведемо регуляризуюче перетворення $t=\varepsilon\tau$, коефіцієнти $a_{ij}(x,t), b_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $b(x,t)$ необхідно розкласти по степенях $\varepsilon\tau$. Після цього для знаходження $v_i(x,\tau)$ одержимо рівняння, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε у виразі $L_\varepsilon v=0$. Тоді

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2}+\frac{\partial v_k}{\partial \tau}=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\frac{b_{ij}^{(\alpha)}(x,0)}{\alpha!}\tau^\alpha\frac{\partial^2 v_{k-1-\alpha}}{\partial x_i \partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\frac{b_i^{(\alpha)}(x,0)}{\alpha!}\tau^\alpha\frac{\partial v_{k-1-\alpha}}{\partial x_i}- \quad /5/$$

$$-\sum_{\alpha=0}^{k-1}\frac{b^{(\alpha)}(x,0)}{\alpha!}\tau^\alpha v_{k-1-\alpha}+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{k-2}\frac{a_{ij}^{(\alpha)}(x,0)}{\alpha!}\tau^\alpha\frac{\partial^2 v_{k-2-\alpha}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тут і далі приймаємо $v_i\equiv 0\ /\ i<0\ /.$

Очевидно, результати обидвох ітераційних процесів на кожному етапі зв"язані певними умовами. Для виявлення цього зв"язку підставимо суму $\bar{u}(x,t,\varepsilon)+v(x,\tau,\varepsilon)$ в /2/ і, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо

$$\bar{u}_i(x,0)=-v_{i-1}(x,0) \qquad (i=0,\dots,N), \qquad /6/$$

$$\bar{u}_i(x,t)\Big|_{x\in\Gamma}=0 \qquad (i=0,\dots,N), \qquad /7/$$

$$\frac{\partial v_i(x,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial \bar{u}_i(x,0)}{\partial t}, \quad v_i(x,\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0 \quad (i=0,\dots,N). \qquad /8/$$

Таким чином, функції $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються як розв"язки змішаних задач /4/, /6/, /7/ для параболічного рівняння. $V_i(x,\tau)$ знаходять як розв"язки задач /5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь / x – параметр/. Очевидно, якщо вести ітераційні процеси одночасно / $\bar{u}_0$, V_0, $\bar{u}_1$ і т.д./, то рекурентно дістаємо всі $\bar{u}_i(x,t)$ і $V_i(x,\tau)$. При цьому, з огляду на умови I/ – 4/, існують і єдині достатньо гладкі розв"язки задач /4/, /6/, /7/ [5]. Оскільки існує тільки один від"ємний корінь характеристичного рівняння $\lambda^2+\lambda=0$, і саме стільки умов випадає при переході до виродженої задачі,* то виродження – регулярне [I]. Методом математичної індукції легко показати, що всі $V_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ – функції типу примежового шару.

Нев"язка, або залишковий член $Z_N(x,t,\varepsilon)$, є розв"язком задачі

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 Z_N}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\frac{\partial Z_N}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 Z_N}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial Z_N}{\partial x_i}+b(x,t)Z_N=F(x,t,\varepsilon), \qquad /9/$$

$$Z_N(x,0,\varepsilon)=V_N(x,0),\quad \frac{\partial Z_N(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=0,\quad Z_N\Big|_{x\in\Gamma}=-V_N\Big|_{x\in\Gamma}, \qquad /10/$$

де $F(x,t,\varepsilon)$ – відома функція, яку легко записати. Умови I/–4/ гарантують існування класичного розв"язку задачі /9/, /10/ [4]. Методом інтегралів енергії [3] показана обмеженість $Z_N(x,t,\varepsilon)$ в нормі $L_2(D_T)$. Це доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/–4/ розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються з першого ітераційного процесу як розв"язки задач /4/, /6/, /7/.

функції примежового шару $v_i(x,\tau)$ - розв"язки задач /5/, /8/, залишковий член $Z_N(x,t,\varepsilon)$, обмежений у метриці $L_2(D_T)$.

Зауваження. Змішану задачу для дуже частинного випадку рівняння /1/ при $n=1$ розглянуто у праці [2].

Список літератури: 1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи математических наук, 1957, № 5. 2. Эйюбов Р.А. Асимптотика решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в уравнение параболического типа. - Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 1. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 4. Ладыженская О.А. - Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: Физматгиз, 1953. 5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.913

Ю.В.Жерновий, В.Г.Костенко

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ П"ЯТОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y^{(V)}+p_1(x)y'''+(p_2(x)+r(x))y''+p_3(x)y'+p_4(x)y=0$$

у вигляді

$$y^{(V)}+A(x)y'''+B(x)y''+C(x)y'+D(x)y=(A(x)-p_1(x))y'''+$$

$$+(\tfrac{3}{2}A'(x)-r(x))y''+(C(x)-p_3(x))y'+(D(x)-p_4(x))y, \quad /1/$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''',\ y^{(IV)}(x_0)=y_0^{(IV)}, \quad /2/$$