функції примежового шару $V_i(x,\tau)$ – розв"язки задач /5/, /8/, залишковий член $Z_N(x,t,\varepsilon)$, обмежений у метриці $L_2(D_T)$.

Зауваження. Змішану задачу для дуже частинного випадку рівняння /I/ при $n=1$ розглянуто у праці [2].

Список літератури: I. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи математических наук, 1957, № 5. 2. Эйюбов Р.А. Асимптотика решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в уравнение параболического типа. – Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-мат. наук, 1976, № I. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Ладыженская О.А. – Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Физматгиз, 1953. 5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.913

Ю.В.Жерновий, В.Г.Костенко

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ П"ЯТОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y^{(V)}+P_1(x)y'''+(P_2(x)+r(x))y''+P_3(x)y'+P_4(x)y=0$$

у вигляді

$$y^{(V)}+A(x)y'''+B(x)y''+C(x)y'+D(x)y=(A(x)-P_1(x))y'''+$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}A'(x)-r(x)\right)y''+(C(x)-P_3(x))y'+(D(x)-P_4(x))y, \quad /I/$$

$$y(x_0)=y_0,\; y'(x_0)=y_0',\; y''(x_0)=y_0'',\; y'''(x_0)=y_0''',\; y^{(IV)}(x_0)=y_0^{(IV)}, \quad /2/$$

де

$$A(x)=z^{-2}(x)\left(\mu-10z''(x)z(x)+5z'^2(x)\right);\quad B(x)=\lambda z^{-3}(x)+\tfrac{3}{2}A'(x);$$

$$C(x)=\left(\nu-3\lambda z'(x)\right)z^{-4}(x)+0{,}9A''(x)+\left(0{,}4A(x)\right)^2; \qquad /3/$$

$$\mathcal{D}(x)=\left(\varkappa-2\nu z'(x)+4\lambda z'^2(x)-2\lambda z''(x)z(x)\right)z^{-5}(x)+0{,}2A'''(x)+0{,}16A'(x)A(x);$$

$z(x)$ – довільна неперервно диференційована функція до п"ятого порядку; μ, λ, ν, $\varkappa$ – довільні сталі; $P_2(x)=\lambda z^{-3}(x)\neq 0$.

Задача /1/, /2/ за допомогою праці [1] зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерра, в результаті дослідження якого доведено таку теорему.

<u>Теорема.</u> Нехай функція $P_4(x)$ неперервна, $P_3(x)$, $r(x)$, $P_1(x)$ і $P_2(x)=\lambda z^{-3}(x)\neq 0$ неперервно диференційовані відповідно один, два, три і п"ять разів на інтервалі $x_0\leq x<\infty$. Крім того, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\mathcal{D}(x)$ задовольняють умови /3/, $\varkappa^2+\lambda^2\nu-\mu\lambda\varkappa=0$, $-\frac{\varkappa}{\lambda}=a^2>0$, δ_1^0, δ_2^0, δ_3^0 – корені рівняння $\delta^3+(\mu+a^2)\delta-\lambda=0$, причому $\delta_2\delta_3-\frac{1}{4}\delta_1^2=-\tilde{a}^2<0$. Тоді за умов

$$z(x)>0,\quad \tilde{a}>0,\quad \delta_1>0,\quad a>\tfrac{1}{2}\delta_1+\tilde{a},$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=-\infty,\ \int_{x_0}^{\infty}b(t)\,dt<\infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)z^2(x)=0,\ (i=\overline{2,5}),$$

або

$$z(x)<0,\quad \tilde{a}>0,\quad a>\delta_1>0,\quad \tfrac{1}{2}\delta_1-\tilde{a}>0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=-\infty,\ \int_{x_0}^{\infty}b(t)\,dt<\infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)z^2(x)=0,\ (i=1,3,4,5),$$

де

$$b(x)=5\,|z(x)|\max\left[|\mathcal{P}_1(x)|,\ldots,|\mathcal{P}_5(x)|\right];$$

$$\mathcal{P}_1(x)=-P\Big\{\left(6z''z'z+2z'''z^2+2az'^2+5az''z+3a^2z'+a^3\right)A_1+$$
$$+z\left(2z'^2+2z''z+3az'+a^2\right)A_2+z^2\left(2z'+a\right)A_3+z^3A_4\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x) = -Q\Big\{(6\zeta''\zeta'\zeta + 2\zeta'''\zeta^2 - 2a\zeta'^2 - 5a\zeta''\zeta + 3a^2\zeta' - a^3)A_1 + \zeta(2\zeta'^2 + 2\zeta''\zeta - 3a\zeta' + a^2)A_2 + \zeta^2(2\zeta' - a)A_3 + \zeta^3 A_4\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x) = -R\Big\{\big[6\zeta''\zeta'\zeta + 2\zeta'''\zeta^2 + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})(2\zeta'^2 + 5\zeta''\zeta) + 3(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\zeta' + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^3\big]A_1 + \zeta\big[2\zeta'^2 + 2\zeta''\zeta + 3(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\zeta' + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big]A_2 + \zeta^2(2\zeta' + \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})A_3 + \zeta^3 A_4\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x) = -S\Big\{\big[6\zeta''\zeta'\zeta + 2\zeta'''\zeta^2 + (\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})(2\zeta'^2 + 5\zeta''\zeta) + 3(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\zeta' + (\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big]A_1 + \zeta\big[2\zeta'^2 + 2\zeta''\zeta + 3(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\zeta' + (\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big]A_2 + \zeta^2(2\zeta' + \tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})A_3 + \zeta^3 A_4\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_5(x) = -T\Big\{\big[6\zeta''\zeta'\zeta + 2\zeta'''\zeta^2 - 2\delta_1\zeta'^2 - 5\delta_1\zeta''\zeta + 3\delta_1^2\zeta' - \delta_1^3\big]A_1 + \zeta(2\zeta'^2 + 2\zeta''\zeta - 3\delta_1\zeta' + \delta_1^2)A_2 + \zeta^2(2\zeta' - \delta_1)A_3 + \zeta^3 A_4\Big\}W^{-1};$$

$$A_1 = A(x) - p_1(x);\quad A_2 = \tfrac{3}{2}A'(x) - 3p_1'(x) + r(x);\quad A_3 = C(x) + 2r'(x) - p_3(x) - 3p_1''(x);\quad A_4 = C'(x) + r''(x) + p_4(x) - D(x) - \tfrac{1}{2}A'''(x) - p_3'(x) - p_1'''(x);$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} & \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} & -\delta_1 \\ a^2 & a^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 & \delta_1^2 \\ a^3 & -a^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^3 & -\delta_1^3 \\ a^4 & a^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^4 & \delta_1^4 \end{vmatrix}$$

$$P = -2\tilde{a}(a - \delta_1)\big[\delta_1^2 a^2 + (\tfrac{1}{4}\delta_1^2 - \tilde{a}^2)^2\big] + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} + a)(\tilde{a} - \tfrac{3}{2}\delta_1)\big[a^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2 + \delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big] + (\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} + a)(\tfrac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a})\big[a^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + \delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big];$$

$$Q = -2\tilde{a}(a + \delta_1)\big[\delta_1^2 a^2 + (\tfrac{1}{4}\delta_1^2 - \tilde{a}^2)^2\big] + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} - a)(\tfrac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a})\big[\delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + a^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big] + (a - \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})(\tfrac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a})\big[a^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + \delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big];$$

$$R = 2a(\tfrac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a})\big[a^4 + \delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big] + a^3\big[\delta_1^2 + (\tfrac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big](2\tilde{a} - 3\delta_1);$$

$$S = -2a(\tfrac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a})\big[a^4 + \delta_1^2(\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big] + a^3\big[\delta_1^2 + (\tfrac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big](2\tilde{a} + 3\delta_1);$$

$$T = 4a\tilde{a}\left[a^4 + \left(\tfrac{1}{4}\delta_1^2 - \tilde{a}^2\right)^2\right] - 8a^3\tilde{a}\left(\tfrac{1}{4}\delta_1^2 + \tilde{a}^2\right); \quad \varphi(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \xi^{-4}(t)\,dt;$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких при $x \to \infty$ дають формули:

$$y_1(x_1,x_0) = \xi^2(x)\exp[a\varphi(x,x_0)](1+o(1)), \quad x\to\infty; \qquad /2/$$

$$y_2(x,x_0) = \xi^2(x)\exp[-a\varphi(x,x_0)](1+o(1)), \quad x\to\infty; \qquad /3/$$

$$y_3(x,x_0) = \xi^2(x)\exp[(\tfrac{1}{2}\delta_1+\tilde{a})\varphi(x,x_0)](1+o(1)), \quad x\to\infty; \qquad /4/$$

$$y_4(x,x_0) = \xi^2(x)\exp[(\tfrac{1}{2}\delta_1-\tilde{a})\varphi(x,x_0)](1+o(1)), \quad x\to\infty; \qquad /5/$$

$$y_5(x,x_0) = \xi^2(x)\exp[-\delta_1\varphi(x,x_0)](1+o(1)), \quad x\to\infty \qquad /6/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для похідних першого та другого порядку фундаментальної системи розв"язків рівняння /I/ одержують формальним диференціюванням головним частин формул /2/ - /6/.

Те ж саме маємо для похідних третього і четвертого порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}(A'(x) - P_1'(x))\xi^3(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{5}{2}A''(x) + r'(x) - 4P_1''(x)\right)\xi^4(x) = 0.$$

Список літератури: I. Черновий Ю.Б., Костенко В.Г. Лінійні звичайні диференціальні рівняння п"ятого порядку інтегровані в замкнутій формі. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14. 2. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 3. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. - Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.