УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x))y'+p_3(x)y=0 \qquad /1/$$

встановлено таке твердження.

<u>Теорема.</u> Нехай у рівнянні /1/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0\leqslant x<\infty$. Припустимо також, що

$$A(x)=\xi^{-2}(x)\left(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x)\right),\quad B(x)=\lambda\xi^{-3}(x)+A'(x),$$

$$C(x)=\left(\nu-(0{,}3\mu)^2-\frac{3}{2}\lambda\xi'(x)\right)\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2,$$

$\beta_0\neq 0$ – дійсний розв"язок системи рівнянь

$$20\beta^3-2\mu\beta-\lambda=0,\quad 21\beta^4+3\mu\beta^2+\nu=0,$$

результант якої дорівнює нулеві, причому $6\beta_0^2+\mu=a^2>0$. Тоді за умов

$$\beta_0\xi(x)>0,\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=-\infty,\quad \int_{x_0}^{\infty}b(t)dt<\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)\xi^2(x)=0,$$

або

$$\beta_0\xi(x)<0,\quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x,x_0)=\infty,\quad \int_{x_0}^{\infty}b(t)dt<\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)\xi^2(x)=0,$$
$$(i=\overline{1,3})$$

де

$$\mathcal{P}_1(x)=4a\beta_0\Big\{\left[6\beta_0\xi\xi'''+3\beta_0\xi'^2-2(4\beta_0^2+a^2)\xi'-4\beta_0^3-2a^2\beta_0\right](A(x)-$$
$$-p_1(x))+2\xi(6\beta_0\xi'-4\beta_0^2-a^2)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+4\beta_0\xi^2(C(x)+$$
$$+r(x)-p_3(x)-p_1''(x))\Big\}W^{-1},$$

$$\mathcal{P}_2(x)=a^2\beta_0\Big\{\big(6\xi''\xi+3\xi'^2+24\beta_0\xi'-28\beta_0^2-4a^2\big)\big(A(x)-p_1(x)\big)+$$
$$+12\xi(\xi'+2\beta_0)\Big(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\Big)+4\xi^2\big(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\big)\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x)=a\Big\{\Big[\big(-24\beta_0^2+\tfrac{3}{2}a^2\big)\xi''\xi-\big(12\beta_0^2+\tfrac{3}{4}a^2\big)\xi'^2+2\beta_0\big(16\beta_0^2+a^2\big)\xi'-\beta_0^2\big(16\beta_0^2+a^2\big)\Big]\times$$
$$\times\big(A(x)-p_1(x)\big)+2\xi\Big[-\big(24\beta_0^2+\tfrac{3}{2}a^2\big)\xi'+\beta_0\big(16\beta_0^2+a^2\big)\Big]\Big(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\Big)-$$
$$-\big(16\beta_0^2+a^2\big)\xi^2\big(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\big)\Big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x)=a^3\Big\{\big(\tfrac{3}{2}\xi''\xi+\tfrac{3}{4}\xi'^2+6\beta_0\xi'+9\beta_0^2\big)\big(A(x)-p_1(x)\big)+$$
$$+3\xi(\xi'+2\beta_0)\Big(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\Big)+\xi^2\big(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\big)\Big\}W^{-1};$$

$$b(x)=4\,|\xi(x)|\max\big[|\mathcal{P}_1(x)|,|\mathcal{P}_2(x)|,|\mathcal{P}_3(x)|,|\mathcal{P}_4(x)|\big],$$

$$\varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt;\qquad W=4\beta_0a^3(22\beta_0^2+\mu),$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x\to\infty$ дають формули

$$y_1(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\big(\cos a\varphi(x,x_0)+o(1)\big),\ x\to\infty; \quad /2/$$

$$y_2(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\big(\sin a\varphi(x,x_0)+o(1)\big),\ x\to\infty; \quad /3/$$

$$y_3(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\big(1+o(1)\big),\ x\to\infty; \quad /4/$$

$$y_4(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[-3\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\big(1+o(1)\big),\ x\to\infty. \quad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин рівняння /2/ – /5/.

Те ж саме матиме для похідних другого і третього порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}(A(x)-\rho_1(x))z_1^2(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}(\rho_1'(x)-\tau(x))z_1^3(x)=0.$$

Список літератури: І. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

Сукупність лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно групи перетворень з еліптичною траєкторією[1], у системі координат

$$x=c\,\mathrm{ch}\,u\cdot\cos v,\quad (0\le u\le\infty;\ 0\le v\le\pi)$$
$$y=c\,\mathrm{sh}\,u\cdot\sin v$$

матиме вигляд

$$\left(\frac{\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{sh}\,u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}+\varphi_1\right)\frac{\mathrm{ch}\,u}{c^2\mathrm{sh}^5u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2\varphi_2}{c^2\mathrm{sh}^2u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+$$
$$+\left(\frac{\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{sh}\,u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}-\varphi_1\right)\frac{1}{c^2\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\frac{\mathrm{sh}^2u+\mathrm{ch}^2u}{c^2\mathrm{sh}^4u}\varphi_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{ch}\,u}{c^2\mathrm{sh}^5u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}-\frac{1}{c\,\mathrm{sh}\,u}\cdot\varphi_5\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(2\frac{\varphi_2}{c^2\mathrm{ch}\,u\cdot\mathrm{sh}\,u}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi_4}{c\,\mathrm{ch}\,u}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\varphi_6 w=\varphi_7, \qquad /1/$$

де φ_1, φ_2, ..., φ_7 – довільні функції від u.