Те ж саме маємо для похідних другого і третього порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}(A(x)-\rho_1(x))\xi_1^2(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}(\rho_1'(x)-\tau(x))\xi_1^3(x)=0.$$

Список літератури: І. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 29.01.1979 р.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

Сукупність лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно групи перетворень в еліптичною траєкторією [1], у системі координат

$$x=c\,ch\,u\cdot\cos v,\quad (0\le u\le\infty;\ 0\le v\le\pi)$$
$$y=c\,sh\,u\cdot\sin v$$

матиме вигляд

$$\left(\frac{ch\,u}{sh\,u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}+\varphi_1\right)\frac{ch\,u}{c^2sh^5u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2\varphi_2}{c^2sh^2u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+$$
$$+\left(\frac{ch\,u}{sh\,u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}-\varphi_1\right)\frac{1}{c^2sh\,u\,ch\,u}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\frac{sh^2u+ch^2u}{c^2sh^4u}\varphi_1+\right.$$
$$\left.+\frac{ch\,u}{c^2sh^5u}\cdot\frac{\varphi_3}{2}-\frac{1}{c\,sh\,u}\cdot\varphi_5\right)\frac{\partial w}{\partial u}+\left(2\frac{\varphi_2}{c^2ch\,u\cdot sh\,u}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi_4}{c\,ch\,u}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\varphi_6 w=\varphi_7, \qquad /1/$$

де φ_1, φ_2, ..., φ_7 – довільні функції від u.

Частинним випадком рівняння /1/ при належному виборі φ_1, ..., φ_7 є рівняння для визначення функції напружень $\omega(u,v)$ неоднорідного ортотропного стержня [3]:

$$\frac{ch\,u}{c\,sh^2u\cdot G_1}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{c\,sh^3u\cdot G_1}+\frac{ch\,u}{sh\,u}\cdot\frac{G_1'}{G_1^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}+ \qquad /2/$$

$$+\frac{1}{c\,ch\,u\cdot G_2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=-2c\,ch\,u,$$

де G_1, G_2 – неперервні функції від u.

Розглянемо загальну задачу про кручення ортотропного неоднорідного стержня з перерізом у вигляді частини еліптичного кільця K, що міститься між дугами софокусних гіпербол, яка полягає у визначенні розв"язку $\omega/u,v/$ рівняння /2/ у K і наступним умовам на його межі:

$$\omega\Big|_{\substack{u=u_0\\ v_0\le v\le v_1}}=f_1(v),\qquad \omega\Big|_{\substack{v=v_0\\ u_0\le u\le u_1}}=\psi_1(u), \qquad /3/$$

$$\omega\Big|_{\substack{u=u_1\\ v_0\le v\le v_1}}=f_2(v),\qquad \omega\Big|_{\substack{v=v_1\\ u_0\le u\le u_1}}=\psi_2(u).$$

Розв"язок задачі /2/, /3/ шукаємо у вигляді

$$\omega(u,v)=\omega_0(u)+\omega_1(u,v)+\omega_2(u,v),$$

де

$$\omega_0(u)=\int_{u_0}^{u}\left(\exp\left[\int\left(\frac{1}{ch\,u\cdot sh\,u}+\frac{c\,sh\,u\cdot G_1'}{G_1}\right)du\right]\cdot\int\left(-2c^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, sh^2u\cdot G_1(u)\exp\left[-\int\left(\frac{1}{ch\,u\cdot sh\,u}+\frac{c\,sh\,u\cdot G_1'}{G_1}\right)du\right]\right)du\right)du\ -$$

частинний розв"язок рівняння /2/; $\omega_i(u,v)$, $/i=1,2/$ – розв"язки рівняння

$$\frac{ch\,u}{c\,sh^2u\cdot G_1}\cdot\frac{\partial^2\omega_i}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{c\,sh^3u\cdot G_1}+\frac{ch\,u}{sh\,u}\cdot\frac{G_1'}{G_1^2}\right)\frac{\partial\omega_i}{\partial u}+ \qquad /4/$$

$$+\frac{1}{c\,ch\,u\cdot G_2}\cdot\frac{\partial^2\omega_i}{\partial v^2}=0,$$

які задовольняють відповідно умови:

$$\omega_1\Big|_{\substack{u=u_0,\,u_1\\ v_0\le v\le v_1}}=0,\qquad \omega_1\Big|_{\substack{u_0<u<u_1\\ v=v_0}}=\psi_1(u)-\omega_0(u),$$

$$\omega_1\Big|_{\substack{u_0<u<u_1\\ v=v_1}}=\psi_2(u)-\omega_0(u) \qquad /5/$$

та

$$\omega_2\Big|_{\substack{v_0<v<v_1\\ u=u_0}}=f_1(v),\quad \omega_2\Big|_{\substack{u_0\le u\le u_1\\ v=v_0,\,v_1}}=0,\quad \omega_2\Big|_{\substack{v_0<v<v_1\\ u=u_1}}=f_2(v)-\omega_0(u). \qquad /6/$$

Часткові розв"язки рівняння /4/, що задовольняють нульові крайові умови із /5/, шукаємо у вигляді

$$\omega_{1\ell}=R_\ell(u)\exp\left[\ell\,(v-v_0)\right]. \qquad /7/$$

Тоді R_ℓ має бути розв"язком рівняння

$$R_\ell''-\left(\frac{1}{sh u\cdot ch u}+\frac{1}{c\, sh u}\cdot\frac{G_1'}{G_1}\right)R_\ell'+\frac{sh^2 u}{ch^2 u}\cdot\frac{G_1}{G_2}\ell^2\cdot R_\ell=0, \qquad /8/$$

яке відомою заміною зводимо до

$$R_\ell''+I(u)\,R_\ell=0, \qquad /9/$$

де

$$I(u)=\ell^2\frac{sh^2 u}{ch^2 u}\cdot\frac{G_1}{G_2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{sh^2 u}-\frac{1+ch^2 u}{2c\, sh^2 u\cdot ch u}-\frac{G_1'}{G_1}-$$

$$-\frac{1-2c\, sh u}{4c^2\, sh^2 u}\cdot\frac{G_1'^2}{G_1^2}+\frac{1}{2c}\cdot\frac{G_1''}{sh u\cdot G_1}. \qquad /10/$$

Нехай $\xi(u)=\dfrac{ch u\cdot\sqrt{G_2(u)}}{sh u\cdot\sqrt{G_1(u)}}$, а між $G_1(u)$ і $G_2(u)$ існує залежність

$$\frac{1}{4}\rho^2+\frac{1}{2}\rho'+\frac{1}{4}\xi'^2(u)\cdot\xi^{-2}(u)-\frac{1}{2}\xi''(u)\cdot\xi^{-2}(u)=0, \qquad /11/$$

де

$$\rho=-\frac{1}{sh u\cdot ch u}-\frac{1}{c\, sh u}\cdot\frac{G_1'}{G_1}.$$

У цьому випадку для рівняння /9/ виконуються умови його інтегрування у замкнутій формі:

$$I(u) = \xi^{-2}(u)\left(\lambda - \frac{1}{2}\xi''(u)\cdot\xi(u) + \frac{1}{4}\xi'^{2}(u)\right), \qquad /12/$$

де $\xi(u)$ – довільна двічі неперервно диференційована функція; λ – довільна стала [2].

Розв"язок рівняння /9/ за умови /11/ і $\xi(u) = \frac{ch u\cdot\sqrt{G_2(u)}}{sh u\cdot\sqrt{G_1(u)}}$ у випадку задачі /4/, /5/ повинен перетворюватися у нуль при $u=u_0$ і $u=u_1$.

Таким чином, ми одержали задачу Штурма-Ліувілля:

$$R_\ell'' - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{sh^2u} + \frac{1+ch^2u}{2c\, sh^2u\cdot ch u}\cdot\frac{G_1'}{G_1} + \frac{1-2c\, sh u}{4c^2 sh u}\cdot\frac{G_1'^2}{G_1^2} - \frac{G_1''}{2c\, sh u\cdot G_1}\right)R_\ell + \frac{\ell^2 sh^2u}{ch^2u}\cdot\frac{G_1}{G_2}R_\ell = 0, \qquad /13/$$

$$R_\ell(u_0) = 0, \quad R_\ell(u_1) = 0. \qquad /14/$$

Згідно з загальною теорією задач на власні значення, якщо

$$\frac{3}{2}\frac{1}{sh^2u} + \frac{1+ch^2u}{2c\, sh^2u\cdot ch u}\cdot\frac{G_1'}{G_1} + \frac{1-2c\, sh u}{4c^2 sh^2u}\cdot\frac{G_1'^2}{G_1^2} - \frac{G_1''}{2c\, sh u\cdot G_1} \geq 0, \qquad u_0 \leq u \leq u_1,$$

то власні функції задачі /13/, /14/ ортогональні з вагою

$\frac{sh^2u\cdot G_1}{ch^2u\cdot G_2}$. З умови, що

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{sh t\cdot\sqrt{G_1(t)}}{ch t\cdot\sqrt{G_2(t)}}dt = k\pi,$$

знаходимо власні функції задачі /13/, /14/:

$$R_\ell(u) = \sqrt{\frac{ch u}{sh u}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}}\cdot\sin\left(\ell\int_{u_0}^{u}\frac{sh t\cdot\sqrt{G_1(t)}}{ch t\cdot\sqrt{G_2(t)}}dt\right). \qquad /15/$$

Розв"язок задачі /4/, /5/ зображається рядом Фур"е

$$\omega_1(u,v)=\sum_{\ell=1}^{\infty} R_\ell\left(A_\ell \operatorname{ch}\ell(v-v_0)+B_\ell \operatorname{sh}\ell(v-v_0)\right) \qquad /16/$$

з коефіцієнтами

$$A_\ell=\frac{\int\limits_{u_0}^{u_1} R_\ell(u)\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_2(u)}\cdot\left(\psi_1(u)-\omega_0(u)\right)du}{\int\limits_{u_0}^{u_1} R_\ell^2(u)\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_1(u)}\cdot du}, \qquad /17/$$

$$B_\ell=\frac{1}{\int\limits_{u_0}^{u_1} R_\ell(u)\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_2(u)}\cdot du\cdot \operatorname{sh}\ell(v_1-v_0)}\times \qquad /18/$$

$$\times\Big(\int\limits_{u_0}^{u_1} R_\ell(u)\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_2(u)}\cdot\left(\psi_2(u)-\omega_0(u)\right)du-$$

$$-\operatorname{ch}\ell(v_1-v_0)\int\limits_{u_0}^{u_1} R_\ell(u)\,\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_2(u)}\cdot\left(\psi_1(u)-\omega_0(u)\right)du\Big).$$

У випадку задачі /4/, /6/ часткові розв"язки /4/, що задовольняють нульові крайові умови /6/, подаються у вигляді

$$\omega_{2\ell}(u,v)=R_\ell(u)\exp\left[i\,\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}\right]. \qquad /19/$$

Тоді R_ℓ повинно бути розв"язком рівняння

$$R_\ell''+\Big(-\frac{\ell^2\pi^2}{(v_1-v_0)^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 u\cdot G_1}{\operatorname{ch}^2 u\cdot G_2}-\frac{3}{2\operatorname{sh}^2 u}-\frac{1+\operatorname{ch}^2 u}{2c\,\operatorname{sh}^2 u\cdot\operatorname{ch} u}\cdot\frac{G_1'}{G_1}- \qquad /20/$$

$$-\frac{1-c\,\operatorname{sh} u}{4c^2\,\operatorname{sh}^2 u}\cdot\frac{G_1'^2}{G_1^2}-\frac{G_1''}{2c\,\operatorname{sh} u\cdot G_1}\Big)\cdot R_\ell=0.$$

Якщо існує залежність /11/ між G_1 та G_2 і $\xi(u)=\dfrac{\operatorname{ch} u\cdot\sqrt{G_2(u)}}{\operatorname{sh} u\cdot\sqrt{G_1(u)}}$, то умова інтегрування /12/ для рівняння /20/ виконується при $\lambda=-\dfrac{\ell^2\pi^2}{(v_1-v_0)^2}<0.$

Використовуючи праці [2], знаходимо

$$R_\ell(u)=\sqrt{\frac{ch\,u}{sh\,u}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}}\cdot\left(C_{1\ell}\,ch\left(\frac{\ell\pi}{v_1-v_0}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{sh\,t\,\sqrt{G_1(t)}}{ch\,t\,\sqrt{G_2(t)}}dt\right)+\right. \qquad /21/$$

$$\left.+C_{2\ell}\,sh\left(\frac{\ell\pi}{v_1-v_0}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{sh\,t\cdot\sqrt{G_1(t)}}{ch\,t\,\sqrt{G_2(t)}}dt\right)\right).$$

Розв"язок задачі /4/, /6/ зображається рядом

$$\omega_2(u,v)=\sqrt{\frac{ch\,u}{sh\,u}}\,\sqrt[4]{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}}\cdot\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(ch\left(\frac{\ell\pi}{v_1-v_0}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{sh\,t\cdot\sqrt{G_1(t)}}{ch\,t\cdot\sqrt{G_2(t)}}dt\right)\times\right. \qquad /22/$$

$$\left.\times B_\ell\sin\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}+sh\left(\frac{\ell\pi}{v_1-v_0}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{sh\,t\,\sqrt{G_1(t)}}{ch\,t\,\sqrt{G_2(t)}}dt\right)D_\ell\sin\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}\right)$$

з коефіцієнтами

$$B_\ell=\frac{2\int_{v_0}^{v_1}f_1(v)\cdot\sin\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}\cdot dv}{(v_1-v_0)\cdot\sqrt{\frac{ch\,u_0}{sh\,u_0}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u_0)}{G_1(u_0)}}}, \qquad /23/$$

$$D_\ell=\left(\int\limits_{v_0}^{v_1}\left(f_2(v)-\omega_0(u_1)\right)\cdot\sin\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}\,dv-\right.$$

$$-ch\frac{\ell\pi^2K}{v_1-v_0}\cdot\int\limits_{v_0}^{v_1}f_1(v)\cdot\sin\frac{\ell\pi(v-v_0)}{v_1-v_0}\,dv\times$$

$$\left.\times\frac{\sqrt{\frac{ch\,u_1}{sh\,u_1}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u_1)}{G_1(u_1)}}}{\sqrt{\frac{ch\,u_0}{sh\,u_0}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u_0)}{G_1(u_0)}}}\right)\cdot\frac{(v_1-v_0)\sqrt{\frac{ch\,u_1}{sh\,u_1}}\cdot\sqrt[4]{\frac{G_2(u_1)}{G_1(u_1)}}}{2sh\frac{\ell K\pi^2}{v_1-v_0}}. \qquad /24/$$

У результаті розв"язок задачі /3/, /4/ набуває вигляду

$$\omega(u,v)=\omega_0(u)+\omega_1(u,v)+\omega_2(u,v), \qquad /25/$$

де $\omega_0(u)$ – частковий розв"язок рівняння /3/; $\omega_1(u,v)$ і $\omega_2(u,v)$ – ряди /16/, /22/ з відповідними коефіцієнтами /17/, /18/ і /23/, /24/.

Якщо функції $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ і $f_1(v)$, $f_2(v)$ неперервно диференційовані чотири рази на відрізках $u_0 \leq u \leq u_1$ і $v_0 \leq v \leq v_1$, а на їх кінцях задовольняють умови:

$$\psi_1(u_0) = \psi_2(u_0) = 0, \quad \psi_1'(u_0) = \psi_2'(u_0) = \omega_0'(u_0),$$

$$\psi_1''(u_0) = \psi_2''(u_0) = \omega_0''(u_0), \quad \psi_1(u_1) = \psi_2(u_1) = \omega_0(u_1),$$

$$\psi_1'(u_1) = \psi_2'(u_1) = \omega_0'(u_1), \quad \psi_1''(u_1) = \psi_2''(u_1) = \omega_0''(u_1);$$

$$f_1(v_0) = f_1(v_1), \quad f_1''(v_0) = f_1''(v_1), \quad f_2(v_0) = f_2(v_1) = \omega_0(u_1), \quad f_2''(v_0) = f_2''(v_1) = 0,$$

то /25/ є класичним розв"язком задачі /2/, /3/.

Список літератури: 1. Костенко В.Г., Веселовська О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 2. Костенко К.С. Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 3. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.1979 р.