УДК 517.946

Й.Г.Шипка

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МЕТАГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ В ОБЛАСТЯХ ЗІ ЩІЛИНАМИ

Розглянемо метагармонійний оператор четвертого порядку в області зі щілиною

$$A[u] \equiv (\Delta - k_1^2)(\Delta - k_2^2)u, \; k_i = const, \quad i = 1,2.$$

Під щілиною розуміємо розріз вздовж гладкої незамкнутої поверхні $\sigma$, обмеженої гладкою кривою $\gamma$.

Теорема I. Якщо функції $U(p)$ і $V(p) \in C^4(D)$, в околі лінії $\gamma$ обмежені разом із своїми похідними до другого порядку включно, а треті похідні поводять себе як $R_0^{-\alpha}$, де $0 \leq \alpha < 1$, $R_0$ - відстань від точки $p$ до лінії $\gamma$, то має місце формула

$$\iiint_D (u A[v] - v A[u])\, d\tau = \iint_S \mathcal{F}(u,v)\, d\sigma + \iint_\sigma [\mathcal{F}(u_+, v_+) - \qquad /1/$$
$$- \mathcal{F}(u_-, v_-)]\, d\sigma,$$

де
$$\mathcal{F}(u,v) = u\frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v\frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} -$$
$$- (k_1^2 + k_2^2)\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right);$$

$S$ - поверхня, яка обмежує область $D$; індекси „+" і „-" означають граничні значення величин при наближенні точки $p$ до $\sigma$ по напрямку відповідно додатної або від"ємної нормалі.

Щоб застосувати формулу Гріна для оператора $A[u]$ [2], помістимо лінію $\gamma$ в середину трубчатої поверхні $T_\varepsilon$, яка є обгорткою сфер радіуса $\varepsilon$ з центрами на лінії $\gamma$, і проведемо дві поверхні $\sigma_\varepsilon^+$ та $\sigma_\varepsilon^-$, які розміщені по обидві сторони поверхні $\sigma$ на відстані $\varepsilon$. Через $\sigma_\varepsilon$ позначимо гладку замкнуту поверхню, що складається із $\sigma_\varepsilon^+$ , $\sigma_\varepsilon^-$ і частини трубчастої поверхні $T_\varepsilon$ , яка їх з"єднує. Тоді наявна формула

$$\iiint\limits_{D/D_\varepsilon} (u A[v] - v A[u])\,d\tau = \iint\limits_S \mathcal{F}(u,v)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_\varepsilon} \mathcal{F}(u,v)\,d\sigma \quad /2/$$

У формулі /2/ перейдемо до межі при $\varepsilon \to 0$ . Покажемо, що інтеграли по трубчастій поверхні прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ . Для цього введем на поверхні $T_\varepsilon$ систему координат $\rho, \varphi$ , де $\rho$ - довжина дуги лінії $\gamma$ ; $\varphi$ - кут, що змінюється від $0$ до $2\pi$ . Елемент поверхні $T_\varepsilon$ дорівнюватиме $\varepsilon\, d\rho\, d\varphi$ , тому інтеграл по $T_\varepsilon$ оцінюється величиною $C\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ . Інтеграли по $\sigma_\varepsilon^+$ і $\sigma_\varepsilon^-$ запишемо у вигляді суми двох інтегралів по поверхні $\sigma$ від межових значень підінтегральних виразів, коли точка $P$ прямує до $\sigma$ по напрямку додатної або від"ємної нормалі.

Формула /I/ має місце і для нескінчених областей із щілинами, якщо тільки $u(P)$ і $v(P)$ регулярні на нескінченності функції.

Теорема 2. Коли $\omega(P,Q)$ - фундаментальний розв"язок рівняння $A[u]=0$ , то наявна формула

$$u(P) = \iiint\limits_D \omega(P,Q) A[u]\, d_Q\tau + \iint\limits_S \mathcal{F}[u(Q), \omega(P,Q)]\, d_Q\sigma + \quad /3/$$
$$+ \iint\limits_\sigma [\mathcal{F}(u_+, \omega) - \mathcal{F}(u_-, \omega)]\, d_Q\sigma.$$

Формула /3/ доводиться методом, застосованим у праці [2].

Теорема 3. Якщо $u(P)$ - метагармонійна функція, яка задовольняє умови теореми I, крім цього,

$$u_+(Q) = u_-(Q), \quad \frac{\partial u_+}{\partial n} = \frac{\partial u_-}{\partial n},$$

то

$$u(P) = u_1(P) - \iint\limits_\sigma \left[\omega(P,Q)\mu_1(Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n}\mu_2(Q)\right] d_Q\sigma,$$

де $u_1(P) = \iint\limits_S \mathcal{F}(u,\omega)\, d_Q\tau$, $\mu_1(Q) = \dfrac{\partial \Delta u_+}{\partial n} - \dfrac{\partial \Delta u_-}{\partial n}$,

$\mu_2(Q) = \Delta u_+ - \Delta u_-$,

Коли ж на $\sigma$

$$U_+(Q) = U_-(Q), \quad \Delta U_+ = \Delta U_-,$$

то

$$U(P) = U_1(P) - \iint_\sigma [\Delta \omega \mu_1(Q) + \mu_3(Q)(\Delta\omega - (K_1^2 + K_2^2)\omega)] d_Q \sigma,$$

де

$$\mu_3(Q) = \frac{\partial U_+}{\partial n} - \frac{\partial U_-}{\partial n}.$$

За умови, що на $\sigma$

$$U_+(Q) = U_-(Q), \quad \frac{\partial \Delta U_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta U_-}{\partial n},$$

то
$$U(P) = U_1(P) + \iint_\sigma [\frac{\partial \omega}{\partial n} \mu_2(Q) - \mu_3(Q)(\Delta\omega - (K_1^2 + K_2^2)\omega)] d_Q \sigma.$$
А якщо на $\sigma$

$$\frac{\partial U_+}{\partial n} = \frac{\partial U_-}{\partial n}, \quad \frac{\partial \Delta U_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta U_-}{\partial n},$$

то

$$U(P) = U_1(P) + \iint_\sigma [\frac{\partial \omega}{\partial n} \mu_2(Q) + \mu_4(Q) \frac{\partial}{\partial n} (\Delta\omega - (K_1^2 + K_2^2)\omega)] d_Q \sigma,$$

де $\mu_4(Q) = U_+(Q) - U_-(Q).$

Коли на $\sigma$
$$\Delta U_+ = \Delta U_-, \quad \frac{\partial \Delta U_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta U_-}{\partial n},$$

то

$$U(P) = U_1(P) + \iint_\sigma [\mu_4(Q) \frac{\partial}{\partial n} (\Delta\omega - (K_1^2 + K_2^2)\omega) - \mu_3(Q)(\Delta\omega - (K_1^2 + K_2^2)\omega)] d_Q \sigma.$$

Всі ці формули одержуємо з формули /3/, за умови, що $U(P)$ – метагармонійна функція. При цьому $\mu_1(Q)$ – густина метагармонійного потенціалу простого шару на краю $\gamma$ розрізу $\sigma$ може мати особливості вигляду $R_0^{-\alpha}$. Густини $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ залишаються обмеженими при наближенні точки $Q$ до краю щілини.

Аналогічні формули для бігармонічних функцій отримані у праці [I].

Список літератури: 1. Мартиненко М.Д., Муштенко В.С., Шерифи А. Об интегральном представлении бигармонических функций в областях со щелями. – ДАН БССР, т.8, № 9, 1974.
2. Шипка Й.Г. Про деякі еліптичні рівняння вищих порядків. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.1979 р.

УДК 517.946

Л.О.Губаль, М.І.Іванчов

## ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо застосування методу малого параметра до задачі про визначення температурного поля у шарі при інтенсивному локальному нагріві у випадку, коли теплофізичні характеристики залежать від температури.

Нехай в області $\Omega = \{(x,y,z,t): -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h, t > 0\}$ задано рівняння теплопровідності

$$c_v(T)\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda(T)\, grad\, T) \qquad /1/$$

при таких початкових і крайових умовах:

$$T\Big|_{t=0} = T_0, \qquad /2/$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \qquad T\Big|_{z=h} = T_0, \qquad /3/$$

де $C_v(T)$ – коефіцієнт об"ємної теплоємності; $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; $T_0 = const$;

$$\tilde{q} = \begin{cases} q = const, & \text{коли } x^2+y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{коли } x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$$

За допомогою підстановки Кірхгофа

$$v(x,y,z,t) = \int_{T_0}^{T(x,y,z,t)} \lambda(\theta)\, d\theta$$