Список літератури: 1. Мартыненко М.Д., Муштенко В.С., Шерифи А. Об интегральном представлении бигармонических функций в областях со щелями. - ДАН БССР, т.8, № 9, 1974.
2. Шипка Й.Г. Про деякі еліптичні рівняння вищих порядків. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.1979 р.

УДК 517.946

Л.О.Губаль, М.І.Іванчов

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо застосування методу малого параметра до задачі про визначення температурного поля у шарі при інтенсивному локальному нагріві у випадку, коли теплофізичні характеристики залежать від температури.

Нехай в області $\Omega = \{(x,y,z,t): -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h, t > 0\}$ задано рівняння теплопровідності

$$c_v(T)\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda(T)\,grad\,T) \qquad /1/$$

при таких початкових і крайових умовах:

$$T\Big|_{t=0} = T_0, \qquad /2/$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \qquad T\Big|_{z=h} = T_0, \qquad /3/$$

де $c_v(T)$ - коефіцієнт об'ємної теплоємності; $\lambda(T)$ - коефіцієнт теплопровідності; $T_0 = const$;

$$\tilde{q} = \begin{cases} q = const, & \text{коли } x^2+y^2 \le R^2, \\ 0, & \text{коли } x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$$

За допомогою підстановки Кірхгофа

$$v(x,y,z,t) = \int_{T_0}^{T(x,y,z,t)} \lambda(\theta)\,d\theta$$

задача /I/ – /3/ зводиться до:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a(v)\Delta v, \qquad /4/$$

$$v\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad v\Big|_{z=h} = 0, \qquad /5/$$

де

$$a(v) = \frac{\lambda(T)}{C_v(T)}\Big|_{T=T(v)}.$$

Припустимо, що

$$a(v) = a_0^{(j)} + \varepsilon a_1^{(j)} v + \varepsilon^2 a_2^{(j)} v^2 + \ldots, \quad \theta_{j-1} \le v \le \theta_j, \; j = (\overline{1,K}). \qquad /6/$$

Відповідно зображенню $a(v)$ формулою /6/ розбиваємо процес нагрівання тіла на K етапів.

На першому, коли $\theta_0 \le v \le \theta_1$, застосовуючи метод малого параметра, розв"язок задачі /4/, /5/ шукаємо у вигляді

$$v^{(1)} = v_0^{(1)} + \varepsilon v_1^{(1)} + \varepsilon^2 v_2^{(1)} + \ldots \,. \qquad /7/$$

Функції $v_i^{(1)}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ є розв"язками відповідних задач:

$$\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_0, \quad v_0^{(1)}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad v_0^{(1)}\Big|_{z=h} = 0, \qquad /8_0/$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_1^{(1)} + a_1^{(1)} v_0^{(1)} \Delta v_0^{(1)}, \quad v_1^{(1)}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad v_1^{(1)}\Big|_{z=h} = 0, \qquad /8_1/$$

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_2^{(1)} + a_1^{(1)} \left(v_0^{(1)} \Delta v_1^{(1)} + v_1^{(1)} \Delta v_0^{(1)}\right) + a_2^{(1)} v_0^{(1)} \Delta v_0^{(1)}, \qquad /8_2/$$

$$v_2^{(1)}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad v_2^{(1)}\Big|_{z=h} = 0.$$

Для знаходження функцій $v_i^{(1)}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ використаємо функцію Гріна *

---

* Б е л я е в Н.М., Р я д н о А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978.

$$G(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a_0^{(1)}(t-\tau)}\right)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}}\right)$$

і відомі зображення розв"язків задач /8$_i$/ за допомогою цієї ж функції.

Переходячи у /8$_i$/ до циліндричної системи координат і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$v_0^{(1)}(r,z,t)=\frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(1)}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t d\tau\int_0^R \tau^{-\frac{3}{2}}J_0\left(\frac{r\rho}{2a_0^{(1)}\tau}\right)e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z+2nh)^2}{4a_0^{(1)}\tau}}\rho\, d\rho,$$

$$v_1^{(1)}(r,z,t)=\frac{a_1^{(1)}}{4a_0^{(1)}\sqrt{\pi a_0^{(1)}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^t d\tau\int_0^h d\zeta\int_0^\infty \rho v_0^{(1)}(\rho,\zeta,\tau)\Delta v_0^{(1)}(\rho,\zeta,\tau)\times \qquad /9/$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}J_0\left(\frac{r\rho}{2a_0^{(1)}(t-\tau)}\right)\left(e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z-\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z+\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}}\right)d\rho,$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя уявного аргументу.

Аналогічні формули мають місце для інших функцій $v_i^{(1)}$ $(i=2,3,\dots)$.

До другого етапу переходимо у момент часу t_1, коли в центрі круга нагрівання $v=\Theta_1$. Починаючи з моменту t_1, значення v у точках тіла, де $v\leq\Theta_1$, визначаються за формулами /7/, /9/. В інших точках розрахунок ведуть за формулами, виведеними нижче.

Враховуючи значення v у момент t_1, яке дорівнює $v^{(1)}(r,z,t_1)$, для знаходження $v^{(2)}$ одержуємо задачу

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t}=\left(a_0^{(2)}+\varepsilon a_1^{(2)}v_1^{(2)}+\dots\right)\Delta v^{(2)}, \qquad /10/$$

$$v^{(2)}\Big|_{t=t_1}=v^{(1)}\Big|_{t=t_1},\quad \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z}\Big|_{z=0}=-\tilde{q},\quad v^{(2)}\Big|_{z=h}=0.$$

Застосовуючи, як і вище, метод малого параметра до розв"язування задачі /I0/, дістаємо

$$v_0^{(2)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(2)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_{t_1}^{t} d\tau \int_0^R (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} J_0\left(\frac{r\rho}{2a_0^{(2)}(t-\tau)}\right) e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-\tau)}} \rho d\rho +$$

$$+ \frac{1}{4a_0^{(2)}\sqrt{\pi a_0^{(2)}}(t-t_1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^h d\xi \int_0^{\infty} v^{(1)}(\rho,\xi,t_1) J_0\left(\frac{r\rho}{2a_0^{(2)}(t-t_1)}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z-\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-t_1)}} + e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z+\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-t_1)}} \right) \rho d\rho , \qquad /II/$$

$$v_1^{(2)} = \frac{a_1^{(2)}}{4a_0^{(2)}\sqrt{\pi a_0^{(2)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_{t_1}^{t} d\tau \int_0^h d\xi \int_0^{\infty} v_0^{(2)}(\rho,\xi,\tau) \times$$

$$\times \Delta v_0^{(2)}(\rho,\xi,\tau) J_0\left(\frac{r\rho}{2a_0^{(2)}(t-\tau)}\right) \left(e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z-\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-\tau)}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\rho^2+r^2+(z+\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-\tau)}} \right) \rho d\rho .$$

На наступних етапах обчислення виконують за формулами, аналогічними формулам /II/ з відповідною заміною $v^{(1)}$ на $v^{(2)}$, $v^{(2)}$ на $v^{(3)}$, t_1 на t_2, $a_0^{(2)}$ на $a_0^{(3)}$, $a_1^{(2)}$ на $a_1^{(3)}$ і т.д.

За цією методикою розв"язано задачу про визначення температури T в плиті товщиною h = 0,004 м при нагріванні її тепловим потоком густиною q = 22,5 I0^6 $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2\text{год}}$, який зосереджено на поверхні $z=0$ в крузі радіуса R = 0,002 м. Знайдено нульове наближення температури, коли $\varepsilon=0$ і

$$a(v) = \begin{cases} 0{,}03, \text{ якщо } 0 \leq v \leq 22000, \\ 0{,}014, \text{ якщо } 22000 < v \leq 25000, \\ 0{,}021, \text{ якщо } 25000 < v \leq 40000. \end{cases}$$

Нижче для порівняння наведені результати, одержані даною методикою $T_1(r,z,t)$ і методом сіток $T_2(r,z,t)$ при t = 2 с, r = 0 і r = 0,0005 м:

z	$T_1(0,z)$	$T_2(0,z)$	$T_1(0{,}5\cdot10^{-3};z)$	$T_2(0{,}5\cdot10^{-3};z)$
0	1318	1366	1290	1343
$0{,}5\cdot10^{-3}$	924	974	903	950
$0{,}01\cdot10^{-2}$	635	664	617	649
$0{,}15\cdot10^{-2}$	466	486	454	477
$0{,}2\cdot10^{-2}$	351	367	347	362
$0{,}25\cdot10^{-2}$	268	279	264	275
$0{,}3\cdot10^{-2}$	203	210	201	208
$0{,}35\cdot10^{-2}$	149	152	147	150

Як видно з наведених результатів, максимальне розходження між ними не перевищує 5%.

Стаття надійшла в редколегію 11.04.1979 р.

УДК 517.946

Л.С.Парасюк, Є.М.Парасюк

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА МЕЖІ $x_n = 0$

Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з параметром

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - a^2 u = 0, \quad n \geq 2, \qquad /1/$$

що вироджується на гіперплощині $x_n = 0$, з такими початковими