$$a(v) = \begin{cases} 0{,}03, \text{ якщо } 0 \leq v \leq 22000, \\ 0{,}014, \text{ якщо } 22000 < v \leq 25000, \\ 0{,}021, \text{ якщо } 25000 < v \leq 40000. \end{cases}$$

Нижче для порівняння наведені результати, одержані даною методикою $T_1(r,z,t)$ і методом сіток $T_2(r,z,t)$ при $t = 2$ с, $r = 0$ і $r = 0{,}0005$ м:

z	$T_1(0,z)$	$T_2(0,z)$	$T_1(0{,}5\cdot10^{-3};z)$	$T_2(0{,}5\cdot10^{-3};z)$
0	1318	1366	1290	1343
$0{,}5\cdot10^{-3}$	924	974	903	950
$0{,}01\cdot10^{-2}$	635	664	617	649
$0{,}15\cdot10^{-2}$	466	486	454	477
$0{,}2\cdot10^{-2}$	351	367	347	362
$0{,}25\cdot10^{-2}$	268	279	264	275
$0{,}3\cdot10^{-2}$	203	210	201	208
$0{,}35\cdot10^{-2}$	149	152	147	150

Як видно з наведених результатів, максимальне розходження між ними не перевищує 5%.

Стаття надійшла в редколегію 11.04.1979 р.

УДК 517.946

Л.С.Парасюк, Є.М.Парасюк

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА МЕЖІ $x_n = 0$

Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з параметром

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - a^2 u = 0, \quad n \geq 2, \qquad /1/$$

що вироджується на гіперплощині $x_n = 0$, з такими початковими умовами:

$$u(x',0)=0, \qquad /2/$$

$$x_n^{\lambda}\frac{\partial u(x',x_n)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0}=f(x'), \qquad /3/$$

де $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$.

Розв"язок задачі /I/ – /3/ шукаємо у вигляді $n-1$ – мірного перетворення Фур"є

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(\alpha',x_n)e^{i(x',\alpha')}d\alpha', \qquad /4/$$

де $(x',\alpha')=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_{n-1}\alpha_{n-1}$.

Для трансформанти $\bar{u}(\alpha',x_n)$ одержуємо таку задачу:

$$x_n^{\alpha}\frac{d^2\bar{u}}{dx_n^2}-\lambda x_n^{\alpha-1}\frac{d\bar{u}}{dx_n}+\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+a^2\Big)\bar{u}=0, \qquad /5/$$

$$\bar{u}(\alpha',0)=0, \qquad /6/$$

$$x_n^{\lambda}\frac{d\bar{u}(\alpha',x_n)}{dx_n}\bigg|_{x_n=0}=\tilde{f}(\alpha'), \qquad /7/$$

де
$$\tilde{f}(\alpha')=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y')e^{-i(y',\alpha')}dy'. \qquad /8/$$

Загальний розв"язок рівняння /5/ можна записати у вигляді

$$\bar{u}(\alpha',x_n)=x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}\left[c_1J_\nu(z)+c_2Y_\nu(z)\right], \qquad /9/$$

де $J_\nu(z)$ і $Y_\nu(z)$ – циліндричні функції відповідно першого і другого роду з показником $\nu = \frac{1-\lambda}{2-\alpha}$ дійсного аргументу

$$z = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2-\alpha} x_n^{\frac{2-\alpha}{2}} ; \qquad /10/$$

C_1 і C_2 - довільні сталі.

Для визначення сталих C_1 і C_2 із початкових умов /6/, /7/ використовуємо асимптотику циліндричних функцій [1] при

$$\lambda < 1, \qquad 1+\lambda < \alpha < 2 . \qquad /11/$$

Дістаємо

$$C_1 = \frac{\Gamma(\nu)\,(2-\alpha)^{\nu-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2\right)^{\frac{\nu}{2}}} \tilde{f}(\alpha'), \qquad /12/$$

$$C_2 = 0 . \qquad /13/$$

Тоді

$$\tilde{u}(\alpha', x_n) = \frac{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu-1} x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2\right)^{\frac{\nu}{2}}} J_\nu(z) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y') e^{-i(y',\alpha')} dy' . \qquad /14/$$

Підставивши /14/ у /4/ і змінивши порядок інтегрування, що можливо у нашому випадку, одержимо розв"язок задачі /1/ - /3/ у вигляді

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x'-y', x_n) f(y') dy', \qquad /15/$$

де

$$\omega(x'-y', x_n) = \frac{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu-1} \cdot x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(z)\, e^{i(x'-y',\alpha')}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2\right)^{\nu/2}} d\alpha' . \qquad /16/$$

Вираз /16/ можна значно спростити. Зробивши перетворення [3], а також використавши відоме співвідношення

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-3}\varphi \cdot e^{i\rho r\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-2}{2})}{(\rho r)^{\mu}}\, J_{\mu}(\rho r),$$

одержимо

$$\omega(\eta', x_n) = \frac{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu-1} \cdot x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}}{(2\pi)^{\mu+1}\rho^{\mu}} \int_0^{+\infty} \frac{J_\nu\left(\frac{2x_n^{\frac{2-\alpha}{2}}}{2-\alpha}\sqrt{r^2+a^2}\right)}{(r^2+a^2)^{\nu/2}} J_{\mu}(\rho r)\, r^{\mu+1}\, dr, \qquad /17/$$

де $r = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\eta' = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$, $\mu = \frac{n-3}{2}$.

Інтеграл /17/ є інтегралом типу Соніна-Гегенбауера, що, як відомо, збіжний при додатних x_n і ρ, а також при $\nu > \mu > -1$, що забезпечується умовами /11/.

Проінтегрувавши /17/, запишемо

$$\omega(x'-y', x_n) = \begin{cases} 0, & 0 < x_n < \frac{2-\alpha}{2}|x'-y'|^{\frac{2}{2-\alpha}}, \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{2\nu-1} \cdot R^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}}{2^{\nu+\mu+1}\pi^{\mu+1} a^{\nu-\mu-1}} J_{-\mu+\nu-1}(a\sqrt{R}), & x_n > \frac{2-\alpha}{2}|x'-y'|^{\frac{2}{2-\alpha}}, \end{cases} \qquad /18/$$

де

$$R = \frac{4x_n^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2} - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2.$$

Таким чином справедлива наступна теорема.

<u>Теорема.</u> Якщо $f(x')$ абсолютно інтегровна для $x' \in R^{n-1}$ і $1+\lambda < \alpha < 2$, $\lambda < 1$, то розв"язок задачі /1/ - /3/ існує у вигляді /15/.

<u>Список літератури:</u> 1. В а т с о н Г.Н. Теория Бесселевых функций.-М.: ИЛ, 1949, ч.1. 2. В у ш к о В.П., Л и с е в и ч Л.Н., П а р а с ю к Л.С. Розв"язок змішаної задачі для одного диференціального рівняння, що вироджується на границі області.-ДАН УРСР, 1965, № 4.

3. П а р а с ю к Л.С. Краевые задачи для некоторых самосопряженных дифференциальных уравнений 2-го порядка, вырождающихся на границе области.-Укр. матем. журн., 1975, т.13, № 3. 4. С м и р н о в М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. - М.: Наука, 1966. 5. С н е д д о н И. Преобразование Фурье.- М.: ИЛ, 1955.

Надійшла в редколегію 7.03.1980 р.

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ОПЕРАТОРИ, СПОРІДНЕНІ ЗІ САМОСПРЯЖЕНИМ

Побудуємо крайову пару для пари взаємно спряжених операторів, один з яких симетричний, за умови, що аналогічна задача розв"язана для пари, яка складається з даного симетричного оператора і деякого наперед заданого його самоспряженого розширення, що дає змогу описати певний клас таких розширень. Поняття крайової пари, а також використані далі позначення пояснені у праці [3].

Нехай S - необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H. Припустимо, що дано ще один гільбертів простір G і лінійний оператор $\Gamma: D(S) \to G$.

Далі всюди вважається, що

а/ $\Gamma \in \mathcal{B}(D(S), G)$, де $D(S)$ - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_S$ графіка оператора S;

б/ $R(\Gamma) = G$; в/ $Z(\Gamma)$ щільна в H.

Визначимо оператори L_0 і L співвідношеннями

$$D(L_0) = Z(\Gamma), \qquad L_0 \subset S, \quad L = L_0^* .$$

Зрозуміло, що $L_0 \subset S \subset L$. Крім того, як випливає з результатів праці [2],

$$D(L) = D(S) \oplus S[D(S) \ominus Z(\Gamma)], \qquad /1/.$$

де розклад /1/ є $\|\cdot\|_L$ - ортогональним.