3. П а р а с ю к Л.С. Краевые задачи для некоторых самосопряженных дифференциальных уравнений 2-го порядка, вырождающихся на границе области.-Укр. матем. журн., 1975, т.13, № 3. 4. С м и р н о в М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. - М.: Наука, 1966. 5. С н е д д о н И. Преобразование Фурье.- М.: ИЛ, 1955.

Надійшла в редколегію 7.03.1980 р.

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ОПЕРАТОРИ, СПОРІДНЕНІ ЗІ САМОСПРЯЖЕНИМ

Побудуємо крайову пару для пари взаємно спряжених операторів, один з яких симетричний, за умови, що аналогічна задача розв"язана для пари, яка складається з даного симетричного оператора і деякого наперед заданого його самоспряженого розширення, що дає змогу описати певний клас таких розширень. Поняття крайової пари, а також використані далі позначення пояснені у праці [3].

Нехай S - необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H. Припустимо, що дано ще один гільбертів простір G і лінійний оператор $\Gamma: D(S)\to G$.

Далі всюди вважається, що

а/ $\Gamma\in\mathcal{B}(D(S),G)$, де $D(S)$ - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_S$ графіка оператора S;

б/ $R(\Gamma)=G$; в/ $Z(\Gamma)$ щільна в H.

Визначимо оператори L_0 і L співвідношеннями

$$D(L_0)=Z(\Gamma),\qquad L_0\subset S,\qquad L=L_0^*.$$

Зрозуміло, що $L_0\subset S\subset L$. Крім того, як випливає з результатів праці [2],

$$D(L)=D(S)\oplus S[D(S)\ominus Z(\Gamma)], \qquad /1/.$$

де розклад /1/ є $\|\cdot\|_L$ - ортогональним.

Співвідношення /I/ показує, що елемент $f \in H$ належить $D(L)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $f_1 \in D(S) \ominus Z(\Gamma)$

$$f + Sf_1 \in D(S). \qquad /2/$$

Добре видно, що відповідність $f \mapsto f_1$ однозначна, тобто визначає деякий /лінійний/ оператор. Позначимо його через P_1. Згідно з (2)

$$\forall f \in D(L) \quad f + SP_1 f \in D(S), \; P_1 f \in D(S) \ominus Z(\Gamma). \qquad /3/$$

Розклад /I/ є $\|\cdot\|_L$ - ортогональним, тому

$$1_{D(L)} + SP_1 = P_0, \qquad /4/$$

де P_0 - $\|\cdot\|_L$ - ортопроектор $D(L) \to D(S)$.

<u>Теорема I.</u>

$$\forall f \in D(L) \qquad Lf = SP_0 f + P_1 f. \qquad /5/$$

Доведення. З леми 3.I праці [2] випливає, що для всіх $f_1 \in D(S) \ominus Z(\Gamma)$

$$Sf_1 \in D(L) \ominus D(S), \qquad LSf_1 = -f_1. \qquad /6/$$

Тому $Lf = L(f + SP_1 f) - LSP_1 f = SP_0 f + P_1 f$.

Неважко показати, що існує оператор

$$(\Gamma^*)^{-1} \in \mathcal{B}(D(S) \ominus Z(\Gamma), G).$$

Приймемо $\Gamma_1 = (\Gamma^*)^{-1} P_1$.

Лема I. Пара (G, Γ_1) є крайовою для пари (S, L).

Доведення. Нехай $f \in D(L)$. Співвідношення (4) показує, що $\|SP_1 f\|_L \leqslant \|f\|_L$, а /6/ - $\|SP_1 f\|_L = \|P_1 f\|_S$. Звідси випливає

$\Gamma_1 \in \mathcal{B}(D(L), G)$. Далі, прийнявши для довільного $\gamma \in G$ $f = -S\Gamma^*\gamma$, бачимо, що $f \in D(L)$ і $\Gamma_1 f = \gamma$, тому $R(\Gamma_1) = G$. Нарешті, якщо $f \in Z(\Gamma_1)$, то $P_1 f = 0$ і згідно з /3/ $f \in D(S)$. Навпаки, коли $f \in D(S)$, то /2/ виконується при $f_1 = 0$, тому $f \in Z(\Gamma_1)$.

Теорема 2. Нехай

$$\Gamma_0 = \Gamma P_0 = \Gamma(1_{D(L)} + SP_1). \qquad /7/$$

Тоді $(G \oplus G, \Gamma_0 \oplus \Gamma_1)$ є крайовою парою для (L_0, L).

Для доведення досить виконати безпосередню перевірку, при цьому слід використати лему I.

Має місце така "формула Гріна".

Теорема 3. Для всіх $f, g \in D(L)$

$$(Lf|g) - (f|Lg) = (\Gamma_1 f|\Gamma_0 g)_G - (\Gamma_0 f|\Gamma_1 g)_G. \qquad /8/$$

Доведення. Нехай $f, g \in D(L)$. Враховуючи /4/ і /5/, одержуємо

$$I \overset{df}{=} (Lf|g) - (f|Lg) =$$

$$= (SP_0 f + P_1 f | P_0 g - SP_1 g) - (P_0 f - SP_1 f | SP_0 g + P_1 g).$$

Далі, оскільки $S^* = S$ і $P_1 = \Gamma^*\Gamma_1$, то

$$I = (P_1 f|P_0 g)_S - (P_0 f|P_1 g)_S = (\Gamma_1 f|\Gamma P_0 g)_G - (\Gamma P_0 f|\Gamma_1 g)_G$$

і залишається використати /7/.

Нехай $\Theta \in \mathcal{B}(G)$. Приймемо $F_0 = \Gamma_1 - \Theta\Gamma_0$. Тому що $Z(F_0) \supset Z(\Gamma)$, то F_0 можна трактувати як крайовий оператор для пари (L_0, L). Зауважимо, що $R(F_0) = G$, оскільки для кожного $\gamma \in G$ $F_0 f = \gamma$ при $f = -S\Gamma^*\gamma$. Визначимо оператор S_Θ за допомогою співвідношень

$$S_\Theta \subset L, \quad D(S_\Theta) = Z(F_0).$$

Теорема 4. $(S_\theta)^* = S_{\theta^*}$, зокрема S_θ самоспряжений тоді і тільки тоді, коли θ самоспряжений.

Доведення. Нехай $g \in D((S_\theta)^*)$. Тому що $L_0 \subset S_\theta \subset L$, то $L_0 \subset (S_\theta)^* \subset L$, отже /див. /8//,

$$\forall f \in D(S_\theta) \quad (\Gamma_0 f / \theta^* \Gamma_0 g - \Gamma_1 g)_G = 0.$$

Тому досить переконатися, що $\forall \gamma \in G$ існує $f \in D(S_\theta)$ таке, коли $\Gamma_0 f = \gamma$. А це справді так. За умови $f_s \in D(S)$ і $\Gamma f_s = \gamma$ при $f = f_s - \Gamma^* \theta \gamma$ маємо $F_\theta f = 0$, $\Gamma_0 f = \gamma$.

Зауваження. Інший підхід до встановлення формули типу /8/, а також опис самоспряжених розширень симетричного оператора у термінах абстрактних граничних операторів запропоновано у праці [1].

Список літератури: 1. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Мат заметки, 1975, 17, № 1. 2. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. - Теория функций, функциональный анализ, 1972, вып. 16. 3. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14.

Стаття надійшла в редколегію 26.02.1979 р.

УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ПРО СЛАБО РЕГУЛЯРНЕ ЗБУРЕННЯ

У праці [3] розглянуто слабо регулярне збурення оператора S^2 /S - оператор множення на незалежну змінну /і сформульовано ряд тверджень. Узагальнимо ці результати на випадок слабо регулярного збурення оператора S^n (n - натуральне, $n \geq 2$). Викладена нижче