Теорема 4. $(S_\theta)^* = S_{\theta^*}$, зокрема S_θ самоспряжений тоді і тільки тоді, коли θ самоспряжений.

Д о в е д е н н я . Нехай $g \in D((S_\theta)^*)$. Тому що $L_0 \subset S_\theta \subset L$, то $L_0 \subset (S_\theta)^* \subset L$, отже /див. /8//,

$$\forall f \in D(S_\theta) \quad (\Gamma_0 f \,|\, \theta^* \Gamma_0 g - \Gamma_1 g)_G = 0.$$

Тому досить переконатися, що $\forall \gamma \in G$ існує $f \in D(S_\theta)$ таке, коли $\Gamma_0 f = \gamma$. А це справді так. За умови $f_s \in D(S)$ і $\Gamma f_s = \gamma$ при $f = f_s - \Gamma^* \theta \gamma$ маємо $F_0 f = 0$, $\Gamma_0 f = \gamma$.

З а у в а ж е н н я . Інший підхід до встановлення формули типу /8/, а також опис самоспряжених розширень симетричного оператора у термінах абстрактних граничних операторів запропоновано у праці [1].

Список літератури: 1. К о ч у б е й А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Мат заметки, 1975, 17, № 1. 2. Л я н ц е В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. - Теория функций, функциональный анализ, 1972, вып. 16. 3. Л я н ц е В.Э., С т о р о ж О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14.

Стаття надійшла в редколегію 26.02.1979 р.

УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ПРО СЛАБО РЕГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ

У праці [3] розглянуто слабо регулярне збурення оператора S^2 /S - оператор множення на незалежну змінну /і сформульовано ряд тверджень. Узагальнимо ці результати на випадок слабо регулярного збурення оператора S^n (n - натуральне, $n \geq 2$). Викладена нижче теорія з точністю до перетворення Фур"є охоплює спектральну теорію несамоспряжених диференціальних операторів на всій осі вигляду

$$\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^n + p_{n-2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + p_0 ,$$

де $p_0, \ldots p_{n-2}$ – швидко спадні функції.

Нехай $H, G, \mathcal{E}, \Phi, \Phi^*, \Omega, D(\cdot)$ ті ж самі, що і в праці [2]. Крім цього, введемо позначення:

$$\Pi_k^+ \overset{df}{=} \left\{ z \in C : \frac{(2k+1)\pi}{n} > \arg z > \frac{2k\pi}{n} \right\}, \qquad /1/$$

$$\Pi_k^- \overset{df}{=} \left\{ z \in C : \frac{2k\pi}{n} > \arg z > \frac{(2k-1)\pi}{n} \right\},$$

$$\Pi_k^{\pm}(\gamma) \overset{df}{=} \left\{ \zeta \in C : |\zeta - z| < \gamma,\ z \in \Pi_k^{\pm} \right\},$$

$$W^{\pm}(\gamma) \overset{df}{=} \left\{ \zeta \in C : \zeta = z^n,\ z \in \Pi_k^{\pm}(\gamma) \right\} \setminus \left\{ z \in C : \arg z = \mp \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Розглянемо оператори

$$T = L + A^* B F(S), \quad D(T) \overset{df}{=} D(L), \qquad /2/$$

де $L = S^n$; оператори $A, B : H \to G$ слабо регулярні [3]; $F(S)$ – оператор множення на функцію F, яка голоморфна в Ω і при деякому $\delta > 0$ задовольняє умову

$$F(z) = O(|z|^{n-1-\delta}), \ |z| \to \infty \qquad /3/$$

рівномірно в Ω.

<u>Теорема I</u>. Для довільних $\varphi, \psi \in \Phi$ функція $\zeta \to (T_{\zeta^n}\varphi, \psi)$, де $T_\zeta \overset{df}{=} (T - \zeta)^{-1}$, має продовження $\zeta \to (T_{\zeta^n}\varphi, \psi)_{+k}$ $(\zeta \to (T_{\zeta^n}\varphi, \psi)_{-k})$ з області Π_k^+ (Π_k^-), мероморфне в $\Pi_k^+(\varepsilon)$ $(\Pi_k^-(\varepsilon))$.

Н а с л і д о к . Для довільних $\varphi, \psi \in \Phi$ функція $\zeta \to (T_\zeta \varphi, \psi)$ має продовження $\zeta \to (T_\zeta \varphi, \psi)_+$ $(\zeta \to (T_\zeta \varphi, \psi)_-)$ з області $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$, мероморфне в $W^+(\varepsilon)$ $(W^-(\varepsilon))$.

Приймаючи

$$(T_\zeta^{(\pm k)} \varphi, \psi) \overset{df}{=} (T_{\zeta^n} \varphi, \psi)_{\pm k}, \quad (T_\zeta^{\pm} \varphi, \psi) \overset{df}{=} (T_\zeta \varphi, \psi)_{\pm}, \qquad /4/$$

знаходимо, що $T_\zeta^{(\pm k)}\varphi,\ T_\zeta^{\pm}\varphi \in \Phi^*$ для всіх $\varphi \in \Phi$, тобто

$$T_\zeta^{(\pm k)} : \Phi \to \Phi^*, \quad T_\zeta^{\pm} : \Phi \to \Phi^*.$$

Означення. Нехай $n=2m$ /$n=2m+1$ /. Тоді число $\sigma \in]0;\infty[$ ($\sigma \in]-\infty;\infty[\setminus\{0\}$) називаємо спектральною особливістю оператора T, якщо воно є полюсом функції $\zeta \to T_\zeta^+$, чи $\zeta \to T_\zeta^-$. До спектральних особливостей відносимо також точку $\sigma = 0$.

Теорема 2. Нехай оператор T визначається співвідношенням /2/ і $n=2m$ /$n=2m+1$ /.

I. Множина власних значень і спектральних особливостей оператора T скінченна.

2. Якщо $\zeta \bar{\in} [0;\infty[$ ($\zeta \bar{\in}]-\infty;\infty[$) не є власним значенням, то ζ належить резольвентній множині оператора T.

3. Коли $\xi \in [0;\infty[$ ($\xi \in]-\infty;\infty[$) не є спектральною особливістю оператора T, то ξ належить неперервному спектру цього оператора.

4. Для того щоб $\sigma \in [0;\infty[$ ($\sigma \in]-\infty;\infty[$) було власним значенням оператора T, необхідно /але не достатньо/, щоб σ було спектральною особливістю цього оператора.

Для кожного $\lambda \bar{\in} [0;\infty[$ ($\lambda \bar{\in}]-\infty;\infty[$) у випадку $n=2m$ /$n=2m+1$ /, яке є власним значенням оператора T, приймаємо

$$P_\lambda \overset{df}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint T_\zeta \, d\zeta = -\operatorname{Res}_{\zeta=\lambda} T_\zeta, \qquad /5/$$

де контур інтегрування не містить особливостей резольвенти T_ζ відмінних від λ. Для кожної спектральної особливості σ, $\sigma \neq 0$, приймаємо

$$P_{\sigma\pm} \overset{df}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint T_\zeta^\pm \, d\zeta = -\operatorname{Res}_{\zeta=\sigma} T_\zeta^\pm \qquad /6/$$

у випадку $\sigma = 0$,

$$P_{0\pm} \overset{df}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint \zeta^{n-1} T_\zeta^{(\pm 0)} d\zeta = -\operatorname{Res}_{\zeta=0} \zeta^{n-1} T_\zeta^{(\pm 0)} \qquad /7/$$

з аналогічною умовою для контурів інтегрування.

Теорема 3. Оператори P_λ, $P_{\sigma+}$, $P_{\sigma-}$ є скінченновимірними.

Існує ціле число q, $q \geq 0$ таке, що

$$\left|\left(P_{\sigma\pm}\varphi,\psi\right)\right| \leq C\left(\sum_{i=0}^{q}\|\varphi^{(i)}\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{q}\|\psi^{(i)}\|^2\right)^{1/2}, \quad \varphi,\psi\in\Phi, \qquad /8/$$

де C – додатна константа.

<u>Теорема 4.</u> Оператор-функція $\zeta \to K(\zeta)^{n} \stackrel{df}{=} I + BF(\zeta)L_{\zeta,n}A^{*}$ має продовження $\zeta\to K_{+p}(\zeta)$ $(\zeta \to K_{-p}(\zeta))$ з області Π_p^+ (Π_p^-), голоморфне в $\Pi_p^+(\varepsilon)\setminus\{0\}$ $(\Pi_p^-(\varepsilon)\setminus\{0\})$. Причому в оператор-функції $\zeta\to K_{+p}(\zeta)^{-1}$ $(\zeta\to K_{-p}(\zeta)^{-1})$ є скінченна кількість полюсів у $\Pi_p^+(\varepsilon_1)$ $(\Pi_p^-(\varepsilon_1))$, $\varepsilon_1\in[0;\varepsilon[$.

Введемо такі позначення:

у випадку $n=2m$, $\xi>0$

$$\mathcal{D}_k f(\xi) \stackrel{df}{=} f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\beta f(\xi), K_{-0}(\xi)^{*-1}\alpha((-1)^k\xi)\right)_G,$$

$$\mathcal{U}_k f(\xi) \stackrel{df}{=} f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\alpha f(\xi), K_{+0}(\xi)^{-1}\beta((-1)^k\xi)\right)_G, \qquad /9/$$

$$\mathcal{U} f(\xi) \stackrel{df}{=} \left(\mathcal{U}_1 f(\xi), \mathcal{U}_2 f(\xi)\right);\ \mathcal{D} f(\xi) \stackrel{df}{=} \left(\mathcal{D}_1 f(\xi), \mathcal{D}_2 f(\xi)\right);$$

у випадку $n=2m+1$

$$\mathcal{D} f(\xi) \stackrel{df}{=} \begin{cases} f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\beta f(\xi), K_{0}(\xi)^{*-1}\alpha(\xi)\right)_G, & \xi>0, \\ f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\beta f(\xi), K_{-(m+1)}(\xi)^{*-1}\alpha(\xi)\right)_G, & \xi<0, \end{cases}$$

$$\mathcal{U} f(\xi) \stackrel{df}{=} \begin{cases} f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\alpha f(\xi), K_{+0}(\xi)^{-1}\beta(\xi)\right)_G, & \xi>0, \\ f(\xi) - \left(\mathcal{I}_-\alpha f(\xi), K_{+m}(\xi)^{-1}\beta(\xi)\right)_G, & \xi<0, \end{cases} \qquad /10/$$

де $\mathcal{I}_\pm$ позначає відповідне граничне значення інтеграла

$$\mathcal{I}_\pm f(\xi) \stackrel{df}{=} \lim_{\eta\to\pm0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x^n-(\xi+i\eta)^n}, \quad \xi\neq0;$$

$\alpha f(x) \stackrel{df}{=} \alpha(x)f(x)$; $\beta f(x)\stackrel{df}{=}\beta(x)f(x)$, причому $A\sim\alpha$, $B\sim\beta$ /див. [2] /. Виявляється, що для кожного $f\in H$ формули /9/, /10/ визначають: у випадку $n=2m+1$ функції $\mathcal{U}f,\mathcal{D}f$ майже скрізь при $\xi\in]-\infty;\infty[$; у випадку $n=2m$ векторні функції $\mathcal{U}f,\mathcal{D}f$

майже скрізь при $\xi \in [0;\infty[$. Зокрема, можна довести, що

$$\mathcal{U}T^{*}f(\xi) = \xi^{n}\mathcal{U}f(\xi),\ f \in \mathcal{D}(T^{*}),$$

$$\mathcal{Z}Tf(\xi) = \xi^{n}\mathcal{Z}f(\xi),\ f \in \mathcal{D}(T).$$

У зв"язку з цим можемо розглядати оператор $\mathcal{U}(\mathcal{Z})$ як T^{*} - перетворення / T - перетворення/ Фур"є на неперервному спектрі.

Теорема 5. Існує ціле $q_1, q_1 \geq q$ /див. теорему 3/ таке, що для довільних $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{D}^{q_1})$ справедлива наступна рівність Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = F.P.\int \mathcal{Z}f(\xi)\overline{\mathcal{U}g(\xi)}d\xi +$$

$$+ \sum_{\lambda}(P_{\lambda}f, g) + \frac{1}{2}\sum_{\sigma}((P_{\sigma+} + P_{\sigma-})f, g). \qquad /II/$$

В /II/ $\sum_{\sigma}$ поширюється на всі спектральні особливості σ , а $\sum_{\lambda}$ - на всі ті власні значення λ , які не належать $[0;\infty[\ (]-\infty;\infty[)$ у випадку $n=2m\ (n=2m+1)$; при цьому $(P_{\sigma\pm}f, g)$ позначає продовження на $\mathcal{D}(\mathcal{D}^{q_1})$ білінійних форм /6/, /7/, які існують з огляду на оцінку /8/. Що стосується інтеграла у правій частині /II/, то він позначає регуляризоване значення розбіжного інтеграла /див. [I] / вздовж всієї ξ - осі у випадку $n=2m+1$ і вздовж півосі $\xi \geq 0$ у випадку $n=2m$. Для $n=2m$

$$\mathcal{Z}f(\xi)\overline{\mathcal{U}g(\xi)} \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=2} \mathcal{Z}_{k}f(\xi)\overline{\mathcal{U}_{k}g(\xi)}.$$

Автор висловлює глибоку вдячність В.Е.Лянце за постановку задачі та цінні поради.

Список літератури: I. Э д в а р д с Р. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1969. 2. Л я н ц е В.Э. Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. - Математический сборник, 1970, № 82. 3. М и к и т ю к Я.В. Про збурення неперервного спектра. - Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1977, № II9.

Стаття надійшла в редколегію I2.02.1979 р.