УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглянемо сингулярні оператори виду:

$$\mathcal{I}_{\pm\kappa,n} f(\xi) \stackrel{df}{=} n\xi^{n-1-\kappa} \lim_{\eta\to\pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\kappa} f(x)\,dx}{x^n-(\xi+i\eta)^n}, \qquad /1/$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\pm\nu,n} f(\xi) \stackrel{df}{=} n|\xi|^{n-1-\nu} \lim_{\eta\to\pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\nu} f(x)\,dx}{x^n-(\xi+i\eta)^n}, \qquad /2/$$

де n, κ - цілі; ν - дійсне; $-1/2 < \nu, \kappa < n-1/2$; $\xi \in R$; $f \in L_2(R)$.

Оператори $\mathcal{I}_{\pm\kappa,n}$, $\tilde{\mathcal{I}}_{\pm\nu,n}$ застосовують при побудові рівності Парсеваля для операторів, які є збуренням операторів S^n, де S - оператор множення на незалежну змінну в $L_2(R)$; n - натуральне. Оператори $\mathcal{I}_{\pm 0,1}$ збігаються з операторами граничних значень інтегралів типу Коші, властивості яких добре вивчені /див., наприклад працю [2]/. Далі наведемо властивості $\mathcal{I}_{\pm 0,1}$, які необхідні для доведення наших теорем.

Відзначимо, що результат, близький до леми 2, отримано у праці [1], але доведення у нас інше.

Нехай $\mathcal{F}$ - оператор Фур"є-Планшереля, $\mathcal{D}$ - оператор диференціювання в $L_2(R)$, $\chi_+(\cdot)$ $(\chi_-(\cdot))$ - характеристична функція півосі $]0;\infty[$ $(]-\infty;0[)$, а $F(S)$ - оператор множення на функцію $x \to F(x)$. Тоді /див. [2], с.140/.

$$\mathcal{I}_{\pm 0,1} = \pm 2\pi i\, \mathcal{F}^{-1} \chi_{\pm} \mathcal{F}, \quad \chi_{\pm} \stackrel{df}{=} \chi_{\pm}(S), \qquad /3/$$

$\mathcal{I}_{\pm 0,1} f \in \mathcal{D}(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{D}(\mathcal{D})$, причому

$$\mathcal{I}_{\pm 0,1} \mathcal{D} f = \mathcal{D}\mathcal{I}_{\pm 0,1} f \quad \text{при} \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{D}) \qquad /4/$$

/$\mathcal{D}(\cdot)$ - область визначення оператора/.

Позначимо через $P_\pm$, W_ν , Q_ν оператори в $L_2(R)$, які задані формулами

$$P_\pm \overset{df}{=} \mathcal{F}^{-1}\chi_\pm \mathcal{F}, \quad W_\nu \overset{df}{=} \chi_+ + e^{\pi\nu i}\chi_-, \quad Q_\nu \overset{df}{=} W_\nu P_+ + W_{-\nu} P_- . \qquad /5/$$

Л е м а I. Нехай $|\nu| < 1/2$. Тоді оператор Q_ν^{-1} існує, всюди заданий і неперервний.

Д о в е д е н н я . Використовуючи /5/, неважко переконатися, що

$$Q_\nu = (I + \chi_- U\chi_+)(I + \chi_- U\chi_-), \qquad /6/$$

де $U \overset{df}{=} (\cos\pi\nu - 1)I + i\sin\pi\nu\,(P_+ - P_-)$.

/7/

Оскільки $(I + \chi_- U\chi_+)^{-1} = (I - \chi_- U\chi_+)$, то достатньо довести обмеженість знизу оператора $I + \chi_- U\chi_-$. Беручи до уваги самоспряженість оператора $\chi_-(P_+ - P_-)\chi_-$, отримуємо, що

$\| I + \chi_- U\chi_- \| \geq \cos\pi\nu > 0$ при $|\nu| < 1/2$. Лема доведена.

Л е м а 2. Оператори $\tilde{\mathcal{I}}_{\pm\nu,1}$ неперервні в $L_2(R)$.

Д о в е д е н н я . Позначимо через $(z^\nu)_+$ $((z^\nu)_-)$ ту вітку аналітичної функції $z \to z^\nu$, яка отримується при $0 \leq \arg z < 2\pi$ $(-2\pi < \arg z \leq 0)$. Враховуючи лему I, співвідношення /2/, /3/, /5/, неважко переконатися, що при $\operatorname{Im} \xi \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\nu f(x)\,dx}{x - \xi} = (\chi_+ \mathcal{F} Q_\nu^{-1} f, \mathcal{F}\varphi_\xi^-) + (\chi_- \mathcal{F} Q_\nu^{-1} f, \mathcal{F}\varphi_\xi^+), \qquad /8/$$

де $\varphi_\xi^\pm(x) = \dfrac{(x)_\pm^\nu}{x - \xi}$. З допомогою безпосередніх обчислень отримуємо

$$\mathcal{I}_{\pm\nu,1} = \pm 2\pi i\, W_\nu P_\pm Q_\nu^{-1} = W_{\pm\nu}\mathcal{I}_{\pm 0,1} Q_\nu^{-1} . \qquad /9/$$

Звідки з огляду на лему I випливає твердження леми. Лема доведена.

Нехай $p > 0$. Розглянемо оператор $U_p : L_2(R) \to L_2(R)$, який діє за формулою

$$U_p f(x) \overset{df}{=} p^{1/2} f(\operatorname{sgn} x\, |x|^p)\, |x|^{(p-1)/2} \qquad /10/$$

Л е м а 3. Оператор $\mathcal{U}_p$ унітарний і $\mathcal{U}_p^{-1} = \mathcal{U}_{1/p}$. Доведення леми очевидне.

<u>Теорема 1.</u> Оператори $\mathcal{I}_{\pm k,n}$, $\tilde{\mathcal{I}}_{\pm \nu,n}$ неперервні в $L_2(R)$ і справедливі рівності:

$$\mathcal{I}_{\pm k,n} = (\operatorname{sgn} S)^{n-1-k}\, \tilde{\mathcal{I}}_{\pm k,n} (\operatorname{sgn} S)^{k}, \qquad /11/$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\pm \nu, 2m+1} = \mathcal{U}_{2m+1} \tilde{\mathcal{I}}_{\pm\mu,1}\, \mathcal{U}^{-1}_{2m+1}, \quad \mu = \frac{\nu - m}{2m+1}, \qquad /12/$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\pm \nu, 2m} = \mathcal{U}_{2m} (\chi_+ \tilde{\mathcal{I}}_{\pm\gamma,1} \chi_+ - \chi_- \tilde{\mathcal{I}}_{\pm\gamma,1} \chi_-) \mathcal{U}^{-1}_{2m} (I+M), \quad \gamma = \frac{2(\nu-m)+1}{4m}, \qquad /13/$$

де оператор $M: L_2(R) \to L_2(R)$ діє за формулою $Mf(x) = f(-x)$.

Д о в е д е н н я . Достатньо довести рівності /11/, /12/, /13/. Рівність /11/ очевидна, а рівності /12/, /13/ одержуємо прямим обчисленням. Теорема доведена.

Покажемо тепер, як діють оператори $\mathcal{I}_{\pm k,n}$, $\tilde{\mathcal{I}}_{\pm \nu,n}$ на гладкі функції.

Позначимо через $\hat{\mathcal{D}}$ розширення оператора $\mathcal{D}$, приймаючи за $D(\hat{\mathcal{D}})$ множину функцій f таких, що f абсолютно неперервна на всіх проміжках вигляду $[-a; -\varepsilon]$, $[\varepsilon; a]$, $a > \varepsilon > 0$, і $f' \in L_2(R)$. Для таких функцій приймаємо $\hat{\mathcal{D}} f = f'$.

Л е м а 4. Нехай $f \in D(\mathcal{D}^m)$. Тоді $\mathcal{I}_{\pm k,n} f \in D(\hat{\mathcal{D}}^m)$ і

$$\hat{\mathcal{D}}^m \mathcal{I}_{\pm k,n} f = \mathcal{I}_{\pm n \cdot \left\{\frac{k+m}{n}\right\}, n}\, \mathcal{D}^m f, \qquad /14/$$

де $\{\nu\}$ – дробова частина числа ν.

Д о в е д е н н я . Твердження леми випливає з /4/ і таких рівностей:

$$\mathcal{I}_{\pm k, 2m+1} f(\xi) = \mathcal{I}_{\pm 0,1} f(\xi) + \sum_{\operatorname{Im} a_j \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j^{k+1} f(x)\,dx}{x - a_j \xi},$$

$$\mathcal{I}_{\pm k, 2m} f(\xi) = \mathcal{I}_{\pm 0,1} (I + (-1)^k M) f(\xi) + \sum_{\operatorname{Im} a_j \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j^{k+1} f(x)\,dx}{x - a_j \xi},$$

де $a_j = \exp \frac{2\pi i j}{n}$. Лема доведена.

Через $E_\delta : L_2(R) \to L_2(R),\ \delta > 0$ позначимо оператор множення на нескінченно раз диференційовану функцію $x \to E_\delta(x)$, яка задовольняє умову $\forall x \in [-\delta;\delta]\ E_\delta(x) = 0,\ \forall x \bar{\in} [-2\delta;2\delta]\ E_\delta(x) = 1.$

Теорема 2. Нехай $f \in D(\mathcal{D}^p)$, $\nu = \nu_1 + \kappa$, $|\nu_1| < 1/2$ κ - ціле, $0 \leq \kappa \leq n-1$. Тоді справедлива нерівність

$$\| \mathcal{D}^p E_\delta \tilde{\mathcal{I}}_{\pm\nu,n} E_\delta f \| \leq C_{p,\delta} \left(\sum_{l=0}^{p} \| f^{(l)} \|^2 \right)^{1/2}, \quad C_{p,\delta} > 0. \qquad /15/$$

Д о в е д е н н я . Беручи до уваги співвідношення /1/, /2/, /11/

$$E_\delta \tilde{\mathcal{I}}_{\pm\nu,n} E_\delta f = E_\delta |S|^{-\nu_1} (\operatorname{sgn} S)^{n-1-\kappa} \mathcal{I}_{\pm\kappa,n} (\operatorname{sgn} S)^{\kappa} |S|^{\nu_1} E_\delta f. \qquad /16/$$

Нехай $g \in D(\hat{\mathcal{D}}^p)$ і $\hat{\mathcal{D}}^z g \in D(|S|^{-\nu_1})$ для $z \leq p$, тоді неважко показати, що справедливі нерівності:

$$\| \mathcal{D}^p E_\delta |S|^{-\nu_1} (\operatorname{sgn} S)^m g \| \leq C_1 \sup_{z \leq p} \| |S|^{-\nu_1} \hat{\mathcal{D}}^z g \|, \quad C_1 > 0, \qquad /17/$$

$$\| |S|^{\nu_1} \mathcal{D}^p E_\delta |S|^{-\nu_1} (\operatorname{sgn} S)^m g \| \leq C_2 \sup_{z \leq p} \| \hat{\mathcal{D}}^z g \|, \quad C_2 > 0. \qquad /18/$$

Нехай тепер f фінітна і $f \in D(\mathcal{D})^z$. Тоді, враховуючи попередню лему, а також нерівність /18/, маємо

$$\| |S|^{-\nu_1} \hat{\mathcal{D}}^z \mathcal{I}_{\pm\kappa,n} E_\delta |S|^{\nu_1} (\operatorname{sgn} S)^{\kappa} f \| \leq \tilde{C} \sup_{q \leq z} \| \mathcal{D}^q f \|, \quad \tilde{C} > 0.$$

Звідки, беручи до уваги /16/, /17/, отримуємо /15/. Теорема доведена.

Автор висловлює глибоку подяку В.Е.Лянце за цінні поради та зауваження.

Список літератури: 1. Э с к и н Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1973.
2. Л я н ц е В.Э. Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. Математический сборник, 1970, № 82.

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1979 р.