УДК 517.948

М.М.Федик

ПРО РОЗВ"ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Нехай H - гільбертів простір, $L_0, L \in \mathcal{C}(H)$*, причому $L_0 C^{2m} L$, тобто $L_0 \subset L$ і $\dim[D(L)/D(L_0)] = 2m$, $m < \infty$; $S \in \mathcal{C}(H)$, $L_0 C^m S C^m L$ і S - твірний оператори сильно неперервної півгрупи обмежених операторів $\{S(t)\}$ з C_0 умовою. Задача Коші $\frac{dv}{dt} = Sv$, $v(0) = v_0$, $v_0 \in D(S)$ для такого оператора є рівномірно коректною на $D(S)$ і має розв"язок $v(t) = S(t)v_0$.

Якщо в неоднорідному рівнянні $\frac{dv}{dt} = Sv + f$ функція $f(t)$ задовольняє одну із умов:

а/ $f(t) \in D(S)$ і $Sf(t)$ неперервна по t,

б/ $f(t)$ неперервно диференційована по t,

то $v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ є розв"язком цього рівняння з початковою умовою $v(0) = v_0$ [2].

Нехай $T \in \mathcal{C}(H)$ - оператор спорідненний парі (L_0, L). Це позначимо символом $T \sim (L_0, L)$. Означення поняття спорідненості не будемо наводити, оскільки воно відоме [3], [4]. Відзначимо лише, що означення еквівалентне наступному.

Коли $T \sim (L_0, L)$, то існують такі функціонали $u_1', \dots, u_{2m}'$, задані на $D(L)$, неперервні по нормі графіка оператора L, необмежені по нормі простору H, і рівні нулю на $D(L_0)$ та такі $\varphi_1, \dots, \varphi_{2m}, \chi_1, \dots, \chi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in H$, що

$$D(T) = \{f \in D(L) : u_j'(f) = (f, \varphi_j),\ j = 1, \dots, \varkappa\},$$

$$Tf = Lf + \sum_{j=\varkappa+1}^{2m} u_j'(f)\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} (f, \chi_i)\psi_i,\quad f \in D(T).$$

---

* $\mathcal{C}(H)$ - клас щільно заданих замкнених лінійних операторів $H \to H$.

Нехай A – спільне звуження операторів S і T на $\mathcal{Z}(T-S)$. Оператор A, взагалі кажучи, не щільно заданий, але є замкненим. Так само, як і в працях [3][4], позначимо $U_S \stackrel{df}{=} D(S) \ominus^S D(A)$, $U_T \stackrel{df}{=} D(T) \ominus^T D(A)$, де ортогональність розуміємо відповідно як $(\cdot,\cdot)_S - i(\cdot,\cdot)_T$ – ортогональність $((f,g))_A \stackrel{df}{=} (f,g) + (Af, Ag)$ для довільних $f, g \in D(A)$), $\dim U_S, \dim U_T \leq 2m+n$. Якщо $\varkappa = m$, то $\dim U_S = \dim U_T$. Далі вважаємо, що $\varkappa = m$. Через P_S (P_T) позначимо проектор простору $D(S)$ ($D(T)$) на U_S (U_T) паралельно $D(A)$.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dt} = Ty, \quad y(0) = y_0, \qquad /1/$$

де $y_0 \in D(T)$.

Справедливе наступне твердження.

Т в е р д ж е н н я . Нехай $y(t)$ – неперервно диференційовний розв"язок задачі /1/ і $u(t) \stackrel{df}{=} P_T y(t)$. Тоді

1/ $u(t)$ неперервно диференційовна по t,

2/ $u(t)$ задовольняє рівняння

$$P_S\left(S(t)y_{0A} + \int_0^t S(t-\tau)\left(T - \frac{d}{d\tau}\right)u(\tau)\,d\tau\right) = 0, \qquad /2/$$

де $y_{0A} = (1 - P_T)y_0$. Крім того, для $y(t)$ справедлива рівність

$$y(t) = S(t)y_{0A} + \int_0^t S(t-\tau)\left(T - \frac{d}{d\tau}\right)u(\tau)\,d\tau + u(t). \qquad /3/$$

Навпаки, нехай $u(t) \in U_T$, причому $u(0) = P_T y_0$, $y_0 \in D(T)$ і справедливо 1/, 2/, а для $f(t) = \left(T - \frac{d}{dt}\right)u(t)$ виконується одна із умов а/, б/. Визначимо $y(t)$ рівністю /3/. Тоді $y(t)$ є неперервно диференційовним розв"язком задачі /1/.

Д о в е д е н н я . Припустимо, що $y(t)$ – неперервно диференційовний розв"язок задачі /1/ і $u(t) \stackrel{df}{=} P_T y(t)$, $y_A(t) \stackrel{df}{=} y(t) - u(t)$. Доведемо 1/. Оператор P_T обмежений у просторі $D(T)$ з нормою графіка оператора T. Оскільки $P_T y(t)$ належить простору U_T і $\dim U_T < \infty$, а в скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні,

то $P_T y(t)$ неперервно диференційовна по нормі простору H. Тому що $y_A = y - u$, то і $y_A(t)$ неперервно диференційовна.

Щоб показати 2/, запишемо рівняння $\frac{dy}{dt} = Ty$ у вигляді

$$\frac{dy_A}{dt} = Sy_A + (T - \frac{d}{dt})u \qquad /4/$$

Із I/ випливає, що $\frac{dy}{dt}$ є сильно неперервною, а $Tu(t)$ – неперервно диференційовна, оскільки $u(t) \in U_T$, а оператор T обмежений по нормі графіка. Таким чином, $(T - \frac{d}{dt})u(t)$ є сильно неперервною і розв"язок рівняння /4/ має вигляд

$$y_A(t) = S(t)y_{A_0} + \int_0^t S(t-\tau)(T - \frac{d}{dt})u(\tau)d\tau, \qquad /5/$$

де $y_{A_0} = y_{0A} = (1 - P_T)y_0$ [1].

Оскільки $\forall z \in D(A)\ P_S z = 0$, то має місце /2/. Далі,

$$y(t) = y_A(t) + u(t) = S(t)y_{0A} + \int_0^t S(t-\tau)(T - \frac{d}{dt})u(\tau)d\tau + u(t),$$

тобто виконується /3/.

Навпаки, коли $u(t) \in U_T$ така, що справджуються I/, 2/ і $u(0) = P_T y_0$, $y_0 \in D(T)$, то при виконанні для виразу $(T - \frac{d}{dt})u(t)$ однієї з умов а/, б/, функція $y_A(t)$, визначена в /5/, є неперервно диференційовним розв"язком рівняння /4/. Тоді $y(t)$, визначена в /3/, є неперервно диференційовним розв"язком задачі /I/. Це й саме можна отримати і безпосередньою перевіркою.

Доведене твердження вказує шлях, по якому можна звести задачу /I/ знаходження функції $y(t)$, що набуває значення в нескінченномірному просторі H, до знаходження функції $u(t)$, значення якої належать простору U_T, який є скінченномірним.

Приклади застосування цього твердження за браком місць ми тут не розглядаємо.

Список літератури: I. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. 2. К р е й н С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.

3. Лянце В.Э. О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. – ДАН СССР, 1972, № 3. 4. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, № 16.

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1979 р.

УДК 517.9

Г.І.Чуйко

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ОДНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай дано вимірні функції $p_1, p_2 : R_+ =]0, +\infty[\to C$, які задовольняють умову $\forall t \in R_+ \; |p_j(t)| < C \exp(-2\delta t)$ при деяких фіксованих $C > 0$, $\delta > 0$. Утворимо диференціальний вираз

$$l[u] = -\Delta u + (p_1(x_1) + p_2(x_2))u, \qquad /1/$$

де Δ – двовимірний лапласіан. Позначимо Γ межу додатного конуса $(R_+)^2$ простору R^2. Диференціальному виразу /1/ і крайовій умові

$$u|_\Gamma = 0 \qquad /2/$$

зіставимо оператор L, який діє в гільбертовому просторі $H = L_2((R_+)^2)$. За означенням L заданий на множині $D(L)$ тих функцій з простору Соболєва $H^2((R_+)^2)$, які задовольняють /2/, і $Lu = l[u]$ при $u \in D(L)$.

У цій замітці даємо опис спектральних властивостей оператора L. Одновимірний випадок розглянутий у працях [1-3].

Позначимо через $e_j(x, \rho)$ розв'язок рівняння

$$-y'' + p_j(x)y = \rho^2 y, \qquad /3/$$

для якого справедлива асимптотична формула

$$e_j(x, \rho) = e^{ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \quad \operatorname{Im}\rho > -\frac{\delta}{2}, \; |\rho| \to \infty,$$