3. Л я н ц е В.Э. О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. – ДАН СССР, 1972, № 3. 4. Л я н ц е В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, № 16.

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1979 р.

УДК 517.9

Г.І.Чуйко

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ОДНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай дано вимірні функції $p_1, p_2 : R_+ =]0, +\infty[\to C$, які задовольняють умову $\forall t \in R_+ \ |p_j(t)| < C\exp(-2\varepsilon t)$ при деяких фіксованих $C>0$, $\varepsilon>0$. Утворимо диференціальний вираз

$$\ell[u] = -\Delta u + (p_1(x_1) + p_2(x_2))u, \qquad /1/$$

де Δ – двовимірний лапласіан. Позначимо Γ межу додатного конуса $(R_+)^2$ простору R^2. Диференціальному виразу /1/ і крайовій умові

$$u|_\Gamma = 0 \qquad /2/$$

зіставимо оператор L, який діє в гільбертовому просторі $H = L_2((R_+)^2)$. За означенням L заданий на множині $D(L)$ тих функцій з простору Соболєва $H^2((R_+)^2)$, які задовольняють /2/, і $Lu = \ell[u]$ при $u \in D(L)$.

У цій замітці даємо опис спектральних властивостей оператора L. Одновимірний випадок розглянутий у працях [1-3].

Позначимо через $e_j(x,\rho)$ розв"язок рівняння

$$-y'' + p_j(x)y = \rho^2 y, \qquad /3/$$

для якого справедлива асимптотична формула

$$e_j(x,\rho) = e^{ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \quad Im\rho > -\frac{\varepsilon}{2}, \ |\rho| \to \infty,$$

а через $s_j(x,\rho^2)$ – розв"язок рівняння /3/, який задовольняє початкові умови $s_j(0,\rho^2)=0$, $\frac{ds_j}{dx}(0,\rho^2)=1$. Приймемо $e_j(\rho)=e_j(0,\rho)$.

Дамо опис спектра оператора L. Позначимо $Z_+(e_j)$ множину коренів рівняння $e_j(\rho)=0$ в області $Jm\rho>0$. Число λ належить до точкового спектра $\sigma_p(L)$ оператора L тоді і тільки тоді, коли $\lambda=\rho_1^2+\rho_2^2$, $\rho_j\in Z_+(e_j)$, $j=1,2$. Власному значенню λ відповідає власна функція $s(\vec{x})=s_1(x_1,\rho_1^2)\cdot s_2(x_2,\rho_2^2)$ і ланцюжок приєднаних функцій $s^{(\alpha)}(\vec{x})=s_1^{(\alpha_1)}(x_1,\rho_1^2)\, s_2^{(\alpha_2)}(x_2,\rho_2^2)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $0\le\alpha_j<m_j$, $j=1,2$, де m_j – кратність ρ_j як кореня рівняння $e_j(\rho)=0$.

Неперервний спектр $\sigma_c(L)$ оператора L розпадається на головну і точково-неперервну частини. Головна частина неперервного спектра складається з дійсної півосі $\lambda\ge 0$, а точково-неперервна частина – з променів, паралельних до дійсної осі, які виходять з кожної точки ρ_j^2, $\rho_j\in Z_+(e_j)$, $j=1,2$. Власні та приєднані функції неперервного спектра мають такий вигляд:

$$s(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)=s_1(x_1,\lambda_1)\cdot s_2(x_2,\lambda_2),$$
$$s_1^{(\alpha_1)}(x_1,x_2;\rho_1^2,\lambda_2)=s_1^{(\alpha_1)}(x_1,\rho_1^2)\cdot s_2(x_2,\lambda_2),$$
$$s_2^{(\alpha_2)}(x_1,x_2;\lambda_1,\rho_2^2)=s_1(x_1,\lambda_1)\, s_2^{(\alpha_2)}(x_2,\rho_2^2),$$
$$0\le\alpha_j\le m_j,\quad \rho_j\in Z_+(e_j),\quad \lambda_j\ge 0,\quad j=1,2.$$

Відзначимо, що ці функції не належать до простору $L_2((R_+)^2)$. Крім того, є ще приєднані функції неперервного спектра, що відповідають дійсним кореням рівняння $e_j(\rho)=0$.

Щоб одержати розклад функції $f\in L_2((R_+)^2)$ за власними і приєднаними функціями оператора L визначимо L – перетворення Фур"є.

Л е м а . Для кожної фінітної функції $f\in L_2((R_+)^2)$ існують такі числа $C, K_j>0$ $(j=1,2)$, що

$$\iint\limits_{(R_+)^2}|s(f,\lambda_1,\lambda_2)|^2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,d\lambda_1 d\lambda_2\le C\iint\limits_{(R_+)^2}|f(x_1,x_2)|^2dx_1dx_2,$$

$$\int\limits_{R_+}|S_j^{(\alpha_j)}(f,\lambda_i)|^2\sqrt{\lambda_i}\,d\lambda_i \le K_j\iint\limits_{(R_+)^2}|f(x_1,x_2)|^2dx_1\,dx_2,\ (i,j=1,2),$$

де

$$S(f,\lambda_1,\lambda_2)=\iint\limits_{(R_+)^2}f(x_1,x_2)S(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)\,dx_1\,dx_2;$$

$$S_j^{(\alpha_j)}(f,\rho_j^2,\lambda_i)\overset{def}{=}S_j^{(\alpha_j)}(f,\lambda_i)=\iint\limits_{(R_+)^2}f(x_1,x_2)S_j^{(\alpha_j)}(x_1,x_2;\rho_j^2,\lambda_i)\,dx_1\,dx_2,\ i,j=1,2.$$

О з н а ч е н н я . З огляду на лему для кожної функції $f\in L_2((R_+)^2)$ існують границі

$$S(f,\lambda_1,\lambda_2)=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathcal{D}_n}f(x_1,x_2)S(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)\,dx_1\,dx_2, \qquad /4/$$

$$S_j^{(\alpha_j)}(f,\rho_j^2,\lambda_i)=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathcal{D}_n}f(x_1,x_2)S_j^{(\alpha_j)}(x_1,x_2,\rho_j^2,\lambda_i)\,dx_1\,dx_2, \qquad /5/$$

де $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність обмежених множин, що розширюється і вичерпує $(R_+)^2$. Крім того, існують інтеграли

$$S^{(\alpha)}(f)=\iint\limits_{(R_+)^2}f(x_1,x_2)S^{(\alpha)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2). \qquad /6/$$

Сукупність, складену з границь /4/, /5/ та інтегралів /6/, назвемо L – перетворенням Фур"є функції $f\in L_2((R_+)^2)$.

Розглянемо гільбертів простір H_+, елементами якого є функції $f\in L_2((R_+)^2)$, для яких норма

$$\|f\|_+=\iint\limits_{(R_+)^2}|(1+x_1)^{m_0^1+1}(1+x_2)^{m_0^2+1}f(x_1,x_2)|^2dx_1dx_2$$

скінченна. / m_0^j – найбільша з кратностей дійсних коренів рівняння $e_j(\rho)=0$. Множину таких коренів позначаємо $Z_0(e_j)$. Якщо H_- – простір лінійних неперервних функціоналів на H_+, то одержимо деяке оснащення простору $L_2((R_+)^2)$

$$H_+\subset L_2((R_+)^2)\subset H_-.$$

Теорема I. Для функції $f\in H_+$ існує розклад за власними та приєднаними функціями оператора L :

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(R_+)^2}\left[B_1\left[B_2 s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_2(x_2,\lambda_2)\right]S_1(x_1,\lambda_1)\right]\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\;d\lambda_1 d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1})e_1(-\sqrt{\lambda_1})e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(-\sqrt{\lambda_2})}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j\in Z_0(e_1)\cup Z_+(e_1)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^{m_j-1}M_j^1(\lambda_1)\int_0^\infty\left[B_2 s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_2(x_2,\lambda_2)\right]\frac{S_1(x_1,\lambda_1)\sqrt{\lambda_2}\,d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(-\sqrt{\lambda_2})}\right\}_{\lambda_1=\rho_j^2}+ \qquad /7/$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j\in Z_0(e_2)\cup Z_+(e_2)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)^{m_j-1}M_j^2(\lambda_2)\int_0^\infty\left[B_1 s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_1(x_1,\lambda_1)\right]\frac{S_2(x_2,\lambda_2)\sqrt{\lambda_1}\,d\lambda_1}{e_1(\sqrt{\lambda_1})e_1(-\sqrt{\lambda_1})}\right\}_{\lambda_2=\rho_j^2}+$$

$$+\sum_{\substack{\rho_j\in Z_0(e_1)\cup Z_+(e_1)\\ \sigma_k\in Z_0(e_2)\cup Z_+(e_2)}}\left\{\frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial\lambda_1^{m_j-1}\partial\lambda_2^{m_k-1}}M_j^1(\lambda_1)M_k^2(\lambda_2)s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_1(x_1,\lambda_1)S_2(x_2,\lambda_2)\right\}_{\substack{\lambda_1=\rho_j^2\\ \lambda_2=\sigma_k^2}}.$$

Цей розклад є збіжним за нормою простору H_-.

Зауваження. Означення символів B_1, B_2 /за допомогою яких здійснена регуляризація розбіжних інтегралів/ і функції $M_j^1(\lambda_1)$, $M_k^2(\lambda_2)$ таке ж, як в праці [3].

Позначимо через $\mathcal{Y}_{\mathcal{M}}$ многовид функцій $f\in L_2((R_+)^2)$, що задовольняють умови

$$\iint\limits_{R^2}\left|\frac{\xi_1\xi_2\,s(f,\xi_1^2,\xi_2^2)}{e_1(\xi_1)\,e_2(\xi_2)}\right|^2 d\xi_1 d\xi_2<\infty,\ \int\limits_R\left|\frac{\xi_i\,s_j^{(d_j)}(f,\xi_i^2,\rho_j^2)}{e_i(\xi_i)}\right|^2 d\xi_i<\infty,$$

$$i,j=1,2,\ \rho_j\in Z_0(e_j),\quad 0\le d_j<m_j.$$

Многовид $\mathcal{Y}_{\mathcal{M}}$ є щільним у $L_2((R_+)^2)$. Функція $f\in H_+$ належить $\mathcal{Y}_{\mathcal{M}}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left.\frac{\partial^{\nu'+\nu''}}{\partial\lambda_1^{\nu'}\partial\lambda_2^{\nu''}}s(f,\lambda_1,\lambda_2)\right|_{\substack{\lambda_1=\rho_1^2\\ \lambda_2=\rho_2^2}}=0,\ \rho_j\in Z_0(e_j),\ 0\le\nu',\nu''<m_j,\ j=1,2.$$

Тому для функцій $f\in H_+\cap\mathcal{Y}_{\mathcal{M}}$ інтеграли в формулі /7/ не потребують регуляризації і розклад /7/ матиме вигляд:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(R_+)^2}s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_1(x_1,\lambda_1)S_2(x_2,\lambda_2)\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\;d\lambda_1 d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1})e_1(-\sqrt{\lambda_1})e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(-\sqrt{\lambda_2})}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j\in Z_0(e_1)\cup Z_+(e_1)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^{m_j-1}M_j^1(\lambda_1)\int_0^\infty s(f,\lambda_1,\lambda_2)s_2(x_2,\lambda_2)s_1(x_1,\lambda_1)\frac{\sqrt{\lambda_2}\,d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(\sqrt{-\lambda_2})}\right\}_{\lambda_1=\rho_j^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j\in Z_0(e_2)\cup Z_+(e_2)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)^{m_j-1}M_j^2(\lambda_2)\int_0^\infty s(f,\lambda_1,\lambda_2)s_2(x_2,\lambda_2)s_1(x_1,\lambda_1)\frac{\sqrt{\lambda_1}\,d\lambda_1}{e_1(\lambda_1)e_1(-\lambda_1)}\right\}_{\lambda_2=\rho_j^2}+ \qquad /8/$$

$$+\sum_{\substack{\rho_j\in Z_+(e_1)\\ \sigma_k\in Z_+(e_2)}}\left\{\frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial\lambda_1^{m_j-1}\partial\lambda_2^{m_k-1}}M_j^1(\lambda_1)M_k^2(\lambda_2)s(f,\lambda_1,\lambda_2)s(f,\lambda_1,\lambda_2)S_1(x_1,\lambda_1)S_2(x_2,\lambda_2)\right\}_{\substack{\lambda_1=\rho_j^2\\ \lambda_2=\sigma_k^2}}$$

Теорема 2. Розклад /8/ справедливий для кожної функції $f\in\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$, причому інтеграли збігаються за нормою простору $L_2((R_+)^2)$.

Теорема 3. Для довільних функцій $f\in\mathcal{H}_{\mathcal{I}},\ g\in L_2((R_+)^2)$ існує така рівність Парсеваля:

$$\iint_{(R_+)^2}f(x_1,x_2)\,g(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=\frac{1}{\pi^2}\iint_{(R_+)^2}s(f,\lambda_1,\lambda_2)s(g,\lambda_1,\lambda_2)\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1})e_1(-\sqrt{\lambda_1})e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(-\sqrt{\lambda_2})}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j}\int_0^\infty\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^{m_j-1}M_j^1(\lambda_1)s(f,\lambda_1,\lambda_2)s(g,\lambda_1,\lambda_2)\right\}_{\lambda_1=\rho_j^2}\frac{\sqrt{\lambda_2}\,d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2})e_2(-\sqrt{\lambda_2})}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\rho_j\in Z_0(e_2)\cup Z_+(e_2)}\int_0^\infty\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)^{m_j-1}M_j^2(\lambda_2)s(f,\lambda_1,\lambda_2)s(g,\lambda_1,\lambda_2)\right\}_{\lambda_2=\rho_j^2}\frac{\sqrt{\lambda_1}\,d\lambda_1}{e_1(\sqrt{\lambda_1})e_1(-\sqrt{\lambda_1})}+$$

$$+\sum_{\substack{\rho_j\in Z_+(e_1)\\ \sigma_k\in Z_+(e_2)}}\left\{\frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial\lambda_1^{m_j-1}\partial\lambda_2^{m_k-2}}M_j^1(\lambda_1)M_k^2(\lambda_2)s(f,\lambda_1,\lambda_2)s(g,\lambda_1,\lambda_2)\right\}_{\substack{\lambda_1=\rho_j^2\\ \lambda_2=\sigma_k^2}}$$

Список літератури: I. Л я н ц е В.Э. О несамосопряженном дифференциальном операторе второго порядка на полуоси. – ДАН СССР, 1964, 5, № 154. 2. Л я н ц е В.Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. – Математический сборник, 1964, 4, № 64 /106/; № 65 /107/. 3. Н а й м а р к М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

Стаття надійшла в редколегію 12.02.1979 р.