УДК 517.53

О.Н.Фрідман

ОЦІНКИ ЗНИЗУ ФУНКЦІЙ, СУБГАРМОНІЧНИХ В R^m АБО В m -ВИМІРНІЙ КУЛІ

У цій статті одержані оцінки знизу функцій, субгармонічних у просторі R^m, $m \geq 2$, або в кулі $D(R) = \{x : |x| < R\}$, а також так званих δ - субгармонічних функцій, тобто функцій u, що зображаються у вигляді різниці двох субгармонічних функцій, $u = u_1 - u_2$ /через x позначено вектор простору R^m, а через $|x|$ - його довжину/.

Введемо такі позначення: $S(r) = \{x : |x| = r\}$;
$\sigma_m(r) = 2\pi^{m/2}/\Gamma(\frac{m}{2})r^{m-1}$ - площа поверхні сфери $S(r)$;
$d\sigma(x) = d\sigma_r(x)$ - елемент площі поверхні сфери $S(r)$;

$$C(x_k, \alpha_k) = \{x : |x - x_k| \leq \alpha_k\};\ N(r,u) = d_m \int_0^r n(t,u) t^{1-m}\, dt,$$

де $n(t,u)$ - маса Рісса кулі $C(0,t)$ функції u; $d_2 = 1$, $d_m = m-2$, $m > 2$;

$$T(r,u) = \frac{1}{\sigma(r)} \int_{S(r)} u^+(x)\, d\sigma(x) + N(r, u_2).$$

Вважаємо, що $u(x)$ - необмежена зверху δ - субгармонічна функція /скорочено δ -с.г. функція/, що задовольняє умову $u(0) = 0$.

О з н а ч е н н я . Множину куль $C(x_k, \alpha_k)$ називаємо C^0 - множиною в R^m, якщо при $r \to \infty$

$$r^{1-m} \sum_{|x_k| < r} \alpha_k^{m-1} = O(1).$$

<u>Теорема I.</u> Нехай $u(x)$ - δ - с.г. функція в R^m з характеристикою $T(r,u)$. Тоді для довільної додатної заданої на $[0,\infty[$ функції $A(t)$, $A(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ можна вказати C^0 - множину в R^m, зовні якої виконується / $|x| = r$

$$u(x) < A(r)\, T((1+o(1))r, u). \qquad /1/$$

У загальному випадку в нерівності /I/ не можна відкинути величину $O(1)$. При $m=2$ на це вказує приклад функції $u(z)= Re\{e^z\}$, $z\in R^2$. Справді /див., наприклад, [1]/

$$T(r,u)=(1+o(1))\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}},$$

і нерівність $u(r)=e^r < A(r)\,T(r,u)$ не виконується для деяких $A(r)$, що мають властивості, вказані в теоремі. Крім того, можна навести приклади функцій, субгармонічних в R^2, заданого порядку ρ, $0\le\rho\le\infty$, які показують, що функцію $A(r)$ не можна замінити на як завгодно велику сталу.

Теорема I поліпшує оцінку, доведену І.В.Ушаковою [7], але зовні більш "ширшої" множини.

При доведенні теореми I використовується така теорема.

Теорема. Нехай $u(x)$ - δ -с.г. функція в R^m. Тоді для довільного $N>1$ можна вказати систему куль $c(x_k, \alpha_k)$, таку, що $\sum_k \alpha_k^{m-1} < R^{m-1} N^{-1}$ і для $x\in D(R)\setminus U_k\, c(x_k,\alpha_k)$ наявна оцінка

$$u(x) < K_m N\, T(R,u),$$

де K_m - додатна стала, яка залежить тільки від вимірності простору.

Ця теорема доведена М.В.Говоровим [2] для випадку субгармонічних функцій в R^2 і узагальнена Л.С.Кудіною [4] на випадок δ - с.г. функцій в R^m, $m\ge 2$.

Доведення теореми I. Нехай $R_n=(1+\theta)^{n/2}$, $0<\theta<1$, $A_n=\inf\{A(t):\ t\ge R_n\}$, $N_n=A_n K_m^{-1}$, $n\in N$.

Застосовуючи наведену теорему до функції $u(x)$ в кулі $D(R_{n+2})$, одержимо, що нерівність

$$u(x) < K_m N_n\, T(R_{n+2},u) \qquad /2/$$

виконується зовні множини $C_n=U_k\, c(x_k^{(n)},\alpha_k^{(n)})$, $\sum_k (\alpha_k^{(n)})^{m-1} < R_{n+2}^{m-1} N_n^{-1}$.

Зауважимо, що коли

$$C\left(X_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)}\right) \cap \left\{x : R_n \leq |x| \leq R_{n+1}\right\} \neq \emptyset, \qquad /3/$$

$k \in N$, то для $n > n_0$ виконується $|X_k^{(n)}| \geq R_{n-1}$.

З кожної множини C_n , $n \geq n_0$, виділяємо множину тих куль $C\left(X_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)}\right)$, для яких виконується /3/, і позначимо їх через C_n^* . Нехай $C = \left\{U_n C_n^*\right\} \cup D\left(R_{n_0}\right)$, тоді, якщо α_j – радіуси, а X_j – центри куль з C, то $/ R_n \leq r = |x| < R_{n+1}, n \geq n_0 /$

$$r^{1-m} \sum_{|X_j| < r} \alpha_j^{m-1} \leq R_n^{1-m} \left(R_{n_0}^{m-1} + \sum_{j=n_0}^{n+1} \sum_{|X_k^{(j)}| \geq R_{j-1}} \left(\alpha_k^{(j)}\right)^{m-1}\right) <$$

$$< \left(R_{n_0} R_n^{-1}\right)^{m-1} + R_n^{1-m} \sum_{j=n_0}^{n+1} N_j^{-1} R_{j+2}^{m-1} <$$

$$< \left(R_{n_0} R_n^{-1}\right)^{m-1} + 2^{m-1} \sum_{j=n_0}^{n+1} N_j^{-1} (1+\theta)^{(j-n)(m-1)/2} . \qquad /4/$$

Застосовуючи до другого доданка у правій стороні /4/ наслідок з теореми Тепліца/[9], с.326 /, одержуємо, що він прямує до 0 , коли $n \to \infty$. Отже, C є C^0 – множиною в R^m . Таким чином, з /2/ дістаємо, що для $|x| \geq R_n$ і $x \notin C$ виконується

$$u(x) < A_n T\left((1+\theta) R_n, u\right) < A(|x|) T\left((1+\theta)|x|, u\right). \qquad /5/$$

Виберемо дві числові послідовності (θ_ν), $0 < \theta_\nu < 1$, $\theta_\nu \downarrow 0$, $\nu \to \infty$; (ε_ν), $\varepsilon_\nu = 2^{-\nu}$. Тоді згідно з /5/ для кожного $\nu \in N$ існує C^0 – множина в R^m /позначимо її через C'_ν /, зовні якої виконується / $|x| \geq R'_\nu$ /

$$u(x) < A(|x|) T\left((1+\theta_\nu)|x|, u\right). \qquad /6/$$

Виберемо послідовність (R'_ν) так, щоб $R'_{\nu+1} > (\nu+1) R'_\nu$ і для $|x| = r \geq R'_{\nu-1}$

$$\sum_{|X_j^{(\nu)}| < r} \left(\alpha_j^{(\nu)}\right)^{m-1} < \varepsilon_\nu r^{m-1}, \quad C\left(X_j^{(\nu)}, \alpha_j^{(\nu)}\right) \in C'_\nu .$$

З кожної множини C'_ν виділяємо ті кулі, для яких виконується

$$C(x_j^{(\nu)}, \alpha_j^{(\nu)}) \cap \{x : R'_\nu \leq |x| < R'_{\nu+1}\} \neq \emptyset, \qquad /7/$$

і сукупність таких куль позначимо через C'. Неважко показати, що центри $x_j^{(\nu)}$ куль з C'_ν, які задовольняють нерівність /7/, лежать в $\{x : R'_{\nu-1} \leq |x| \leq R'_{\nu+2}\}$. Покажемо, що C' є C^0 – множиною в R^m. Нехай $C' = \bigcup_j C(x_j, \alpha_j)$ і $R'_\nu \leq |x| = r < R'_{\nu+1}$, тоді

$$r^{-(m-1)} \sum_{|x_j|<r} \alpha_j^{m-1} < r^{1-m}\Big[(R'_1)^{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu-1} \varepsilon_j (R'_{j+1})^{m-1} + r^{m-1}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1})\Big] <$$

$$< \left(\frac{R'_1}{R'_\nu}\right)^{m-1} + \sum_{j=1}^{\nu-2} \varepsilon_j \left(\frac{R'_{j+1}}{R'_\nu}\right)^{m-1} + \frac{7}{2^{\nu+1}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{R'_1}{R'_\nu}\right)^{m-1} + \left(\frac{R'_{\nu-1}}{R'_\nu}\right)^{m-1} \sum_{j=1}^{\nu-2} \varepsilon_j + \frac{7}{2^{\nu+1}} \leq \left(\frac{R'_1}{R'_\nu}\right)^{m-1} + \frac{1}{\nu^{m-1}} + \frac{7}{2^{\nu+1}},$$

тобто C' є C^0 –множиною в R^m. Крім того, для $x \overline{\in} C'$ і $|x| > R'_\nu$ виконується нерівність /6/, тобто для $x \overline{\in} C'$ виконується /I/.

Перед тим як сформулювати результати, що подають оцінки знизу функцій, субгармонічних в $D(1)$, наведемо означення.

О з н а ч е н н я . Вважаємо, що множина куль $C = \bigcup_k C(x_k, \alpha_k)$ $\alpha_k + |x_k| < 1,\ k \in N$ має нульову γ -щільність в $D(1)$, якщо

$$\sum{}^{r} \alpha_k^{m-1} = o((1-r)^{m-1}), \quad \gamma = 1,$$
$$\sum{}^{r} \alpha_k^{\gamma(m-1)} = o\left((1-r)^{(\gamma-1)(m-1)}\right),\ \gamma > 1,\ r \to 1,$$

де $\sum^{r}$ – означає сумування по тих k, для яких $C(x_k, \alpha_k) \setminus D(r) \neq \emptyset$.

Для випадку функцій, аналітичних у $D(1)$ з R^2, що не мають там нулів, оцінки знизу модуля одержані М.Картрайт [10], а потім поліпшені М.К.Нікольським [5]. У роботах І.В.Ушакової [6, 8] і І.Ф.Красічкова-Терновського [3] розглянутий випадок функцій, δ - субгармонічних в $D(1)$ в R^2.

Одержані у цій статті оцінки поліпшують і узагальнюють результати І.В.Ушакової [8], але зовні більшої виняткової множини.

Якщо ρ_M і ρ_T відповідно порядки функцій $M(r,u) = \sup\{u(x): |x|=r\}$ і $T(r,u), r<1$, то вони можуть не збігатись, але пов"язані нерівність $\rho_T + m-1 \geq \rho_M \geq \rho_T$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $u(x)$ - субгармонічна функція в $D(1)$. Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \to +\infty$ при $t \to 1$ зовні деякої множини куль нульової γ -щільності в $D(1)$ в R^m, $\gamma > 1$ виконується нерівність / $|x|=r$ /

$$u(x) > -A(r)\, M(r+O(1-r), u).$$

<u>Теорема 3.</u> Нехай $u(x)$ - δ -с.г. функція в $D(1)$ з характеристикою $T(r,u)$. Тоді для довільної додатної функції $A(t), A(t) \to +\infty$ при $t \to 1$ існує множина куль нульової γ - щільності в $D(1)$, зовні якої / $|x|=r$ /

$$u(x) < A(r)\, T(r+o(1-r), u)(1-r)^{-(m-1)}, \text{ коли } \gamma = 1,$$

і

$$u(x) < A(r)\, T(r+o(1-r), u)(1-r)^{(1/\gamma-1)(m-1)}, \quad \text{якщо } \gamma > 1.$$

Використовуючи приклади, побудовані Лінденом [II], у просторі R^2, коли $\rho_M \geq 1$, можемо показати, що функцію $A(r)$ в теоремі 2 не можна замінити на як завгодно велику сталу, і в цьому сенсі теорему 2 не можна поліпшити.

Щодо теореми 3, то в просторі R^2 приклад функції $u(z) = 1-2A\,Re\{(1+z)/(1-z)\}$ показує, що умова $A(r) \to +\infty$ коли $r \to 1$, є суттєвою у випадку $\gamma = 1$ і $\rho_T = 0$.

Якщо $\rho_T > 0$, то ми спроможні вказати лише приклади, які засвідчують, що для $\gamma = 1$ множник $(1-r)^{-1}$ / $m = 2$ / не можна замінити на $(1-r)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3 доводиться тим же методом, що й теорема I, а доведення теореми 2 вимагає певної модифікації цього методу.

Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. 2. Говоров Н.В. Об оценке снизу функции субгармонической в круге. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, 1968, № 6. 3. Красичков-Терновский И.Ф. Оценки субгармонической разности субгармонических функций. I-II. Математический сборник, 1977, 2, № 102 /144/; 5, № 103 /145/. 4. Кудина Л.С. Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1971, № 14. 5. Никольский Н.К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. - Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1974, № 120. 6. Ушакова И,В Некоторые оценки субгармонических функций в круге. - Зап. Харьк. матем. общ-ва, 1963, № 29. 7. Ушакова И.В. Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости. - Вестн. Харьк. ун-та, сер. мех.-мат., 1970, № 53, 34. 8. Ушакова И.В. Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге. - ДАН СССР, 1961, 131, № 6. 9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1969, т.2. 10. Cartwright M.L. On analytic functions regular in the unit circle. I.- Quart. J. Math., 1933, N16, 4. 11. Linden C.N. The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle. - Quart. J. Math., 1056, 7.

Стаття надійшла в редколегію 24.02.1979 р.