УДК 517.549

А.А.Гольдберг

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО ОБМЕЖЕНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

У зв"язку з відомою теоремою Карлесона про корону [2, гл. 12] виникають деякі суміжні питання. Дамо відповідь на два питання Ерла та Тейлора, що були опубліковані у відомому списку нерозв"язаних задач [1]. Питання наводимо лише у тій частині, на яку даємо відповідь. Через $\mathcal{H}^\infty$ позначено клас аналітичних в одиничному крузі D обмежених функцій.

Питання 1 /Ерл [1, задача 9.3 (b)] /. Припустимо, що $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^\infty$. Чи необхідно існують $f \in \mathcal{H}^\infty$ та $\delta > 0$, такі, що

$$\delta(|f_1|+|f_2|) \leq |f| < |f_1|+|f_2|.$$

Питання 2 /Тейлор [1, задача 9.4] /. Чи для кожної пари функцій $f, g \in \mathcal{H}^\infty_\infty$, такої, що $|f|+|g|>0$, існує інша пара функцій $a, b \in \mathcal{H}^\infty$, така, що $af + bg \neq 0 \; (|z|<1)$.

Негативна відповідь на обидва питання відразу випливає з такої теореми.

<u>Теорема.</u> Нехай $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}_2$ - дві довільні неспадні додатні функції, задані відповідно на $[0,1]$ і $(0,\infty)$, причому $\mathcal{K}_2(x) \to 0$ при $x \to 0$. Існують $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^\infty$, $|f_1|+|f_2|>0$ в D, такі, що коли f - аналітична в D функція, для якої

$$|f(z)| = O\{\mathcal{K}_1(|z|)\mathcal{K}_2(|f_1(z)|+|f_2(z)|)\}, \; |z| \to 1, \qquad /1/$$

то f має нескінченну множину нулів у D.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\mathcal{K}_1(0) > 1$. Нехай $b_n = 1-2^{-n}$, $b_n < a_n < b_{n+1}$ і

$$\mathcal{K}_2\left(\frac{a_n - b_n}{1-a_n b_n}\right) < C_n =$$

$$= \mathcal{K}_1(b_n)^{-1} \exp\{-2^{n+2} \ln \mathcal{K}_1(b_{n+1}) - 3^n\}, \; n \in N. \qquad /2/$$

Візьмемо

$$f_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{b_n-z}{1-b_n z}, \quad f_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-a_n z}.$$

Очевидно, $|f_1(z)|<1,\ |f_2(z)|<1,\ |f_1(z)|+|f_2(z)|>0$ при $z\in D$. Припустимо, що для аналітичної в D функції f справджується /I/, але f має скінченну кількість нулів $z_1, \dots, z_p \in D$. Очевидно, що $T(r,1/f)=T(r,f)+O(1)\leq \leq \ln \mathcal{K}_1(r)+O(1),\ r\to 1$, де T – неванлінніївська характеристика. Нехай h_k – головна частина розкладу Лорана функції $1/f$ в околі полюса z_k, $\mathcal{H}=\sum_{k=1}^{p} h_k$. Тоді $\varphi=1/f-\mathcal{H}$ є аналітичною функцією в D і $T(r,\varphi)\leq \ln\mathcal{K}_1(r)+O(1), r\to 1$. Звідси, використовуючи відому оцінку, одержуємо

$$\ln|\varphi(z)|\leq \frac{4}{1-|z|}\ln\mathcal{K}_1\left(\frac{|z|+1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\ |z|\to 1. \quad /3/$$

З /I/ і /2/ випливає, що

$$|f(b_n)|\leq O\{\mathcal{K}_1(b_n)\mathcal{K}_2(|f_2(b_n)|)\}=O\{\mathcal{K}_1(b_n)c_n\},\ n\to\infty.$$

Тоді для деякого $\eta>0$ при $n\geq n_0$ виконується

$$|\varphi(b_n)|\geq |f(b_n)|^{-1}-|\mathcal{H}(b_n)|\geq$$

$$\geq \eta\exp\{2^{n+2}\ln\mathcal{K}_1(b_{n+1})+3^n\}. \quad /4/$$

Але з /3/ випливає

$$|\varphi(b_n)|\leq \exp\{2^{n+2}\ln\mathcal{K}_1(b_{n+1})+O(2^n)\},\ n\to\infty. \quad /5/$$

З огляду на несумісність співвідношень /4/ і /5/ одержана суперечність доводить теорему.

Список літератури: I. *Anderson J.M., Barth K.F., Brannan D.A. Research problems in complex analysis.– Bull. London Math. Soc., 1977, N9.* 2. *Duren P.L. Theory of H^p spaces. N.Y. and London, Akademic Press, 1970.*

Стаття надійшла в редколегію 28.02.1979 р.

УДК 517.5

Ю.М.Галь

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = \sigma + it$ – аналітична у півплощині $\{z : \sigma < A\}$, $-\infty < A < \infty$ функція, задана рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\} \qquad /1/$$

з невід"ємними показниками λ_n, $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$ і абсцисою A абсолютної збіжності, а $M(\sigma) = \sup\{|f(\sigma + it)| : |t| < \infty\}$ і $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду /1/. Вивченню зв"язку між $M(\sigma)$ і $\mu(\sigma)$ у випадку скінченного порядку росту присвячено статті [2, 3]. Ми такий зв"язок виявляємо для довільного росту. Вважаємо що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\ln|a_n| + A\lambda_n) = \infty. \qquad /2/$$

Умова /2/ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mu(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to A - 0$ /надалі будемо писати $\sigma \to A$ /. Оскільки $\mu(\sigma) \le M(\sigma)$, то з /2/ випливає, що $M(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$. З /2/ маємо

$$(\forall q > 0)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|\exp\{A\lambda_n\})^q = \infty\right\}.$$

Проте може існувати $q > 0$ таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|\exp\{A\lambda_n\})^{-q} = K(q) < \infty. \qquad /3/$$

Наступна теорема дає оцінку $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ при виконанні умови /3/.