Список літератури: I. Anderson J.M., Barth K.F., Brannan D.A. Research problems in complex analysis.- Bull. London Math. Soc., 1977, N9. 2. Duren P.L. Theory of H^p spaces. N.Y. and London, Akademic Press, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.1979 р.

УДК 517.5

Ю.М.Галь

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = \sigma + it$ - аналітична у півплощині $\{z : \sigma < A\}$, $-\infty < A < \infty$ функція, задана рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\} \qquad /1/$$

з невід"ємними показниками λ_n, $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$ і абсцисою A абсолютної збіжності, а $M(\sigma) = \sup\{|f(\sigma+it)| : |t| < \infty\}$ і $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \ge 0\}$ - максимальний член ряду /1/. Вивченню зв"язку між $M(\sigma)$ і $\mu(\sigma)$ у випадку скінченного порядку росту присвячено статті [2, 3]. Ми такий зв"язок виявляємо для довільного росту. Вважаємо що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\ln|a_n| + A\lambda_n) = \infty. \qquad /2/$$

Умова /2/ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mu(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to A-0$ /надалі будемо писати $\sigma \to A$ /. Оскільки $\mu(\sigma) \le M(\sigma)$, то з /2/ випливає, що $M(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$. З /2/ маємо

$$(\forall q > 0)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| \exp\{A\lambda_n\})^q = \infty\right\}.$$

Проте може існувати $q > 0$ таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| \exp\{A\lambda_n\})^{-q} = K(q) < \infty. \qquad /3/$$

Наступна теорема дає оцінку $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ при виконанні умови /3/.

Теорема I. Якщо для деякого $q>0$ виконується /3/, то

$$(\forall \sigma < A)\left\{M(\sigma) \le 2K(q)\left(\mu\left(\sigma + \frac{q}{1+q}(A-\sigma)\right)\right)^{1+q}\right\}.$$

З теореми I випливає наступний наслідок: якщо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ln n / \ln\left(|a_n| \exp\{A\lambda_n\}\right) = h < \infty, \qquad /4/$$

то $\forall \varepsilon > 0$ при $\sigma_0(\varepsilon) \le \sigma < A$ виконується

$$M(\sigma) \le K(\varepsilon)\left(\mu\left(\sigma + \frac{h+\varepsilon}{1+h+\varepsilon}(A-\sigma)\right)\right)^{1+h+\varepsilon},$$

де $K(\varepsilon)$ – деяка стала.

Умови /3/ і /4/ є умовами на ріст коефіцієнтів ряду /I/. Коли, наприклад, $A=0$, то з цих умов випливає, що $|a_n|$ досить швидко прямує до ∞ при $n\to\infty$. Проте можна одержати оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ і у випадку, коли про ріст $|a_n|$ нічого невідомо, але при цьому треба накладати умови на ріст $M(\sigma)$ і щільність показників λ_n. Для характеристики росту $M(\sigma)$ користуємось узагальненими порядками, наведеними у праці [I]. Говоримо, що функція $\alpha \in \Lambda$, якщо α визначена на $[a,\infty]$, додатна, неперервна, зростає до ∞ разом з x і є повільно зростаючою, тобто для кожного $c \in (0,\infty)$ виконується $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \to \infty$. Вважатимемо, що $\alpha(\infty)=\infty$. У нас можуть траплятися значення функції α у точках, де вона не визначена; приписуємо їй тоді значення $\alpha(a)$. Нехай далі φ – додатна неспадна при $\sigma < A$ функція. Приймемо

$$\rho_{\alpha\beta}(\varphi) = \overline{\lim_{\sigma\to A}} \alpha(\varphi(\sigma))/\beta(1/(A-\sigma)),\quad \lambda_{\alpha\beta}(\varphi) = \underline{\lim_{\sigma\to A}} \alpha(\varphi(\sigma))/\beta(1/(A-\sigma)), \qquad /5/$$

де α і β – неспадні неперервні функції, визначені на $[a,\infty]$

Якщо в /5/ прийняти $\varphi(\sigma) = \ln M(\sigma)$, то одержимо величини $\rho_{\alpha\beta}(\ln M) = \rho_{\alpha\beta}(f)$ і $\lambda_{\alpha\beta}(\ln M) = \lambda_{\alpha\beta}(f)$, які називаються відповідно порядком і узагальненим нижнім порядком функції /I/.

Нехай тепер $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$, а $0 < c < \infty$. Приймаємо

$$F(x;c) = \beta^{-1}(c\alpha(x)),\quad F^{-1}(x;c) = \alpha^{-1}(c\beta(x)).$$

Теорема 2. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і для кожного $c \in (0,\infty)$ при $x \to \infty$ виконується

$$x/F(x;c)\uparrow\infty, \quad \alpha(x/F(x;c)) \sim \alpha(x). \qquad /6/$$

Тоді, якщо $\rho_{\alpha\beta}(f) < \infty$ і для кожного $\gamma < 1/\rho_{\alpha\beta}(f)$ виконується

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \lambda_n^{-1} F(\lambda_n;\gamma)\ln n < \infty,$$

то $\forall \varepsilon > 0$ при $\sigma_0(\varepsilon) \le \sigma < A$ існує нерівність

$$M(\sigma) \le \mu(\sigma)\exp\{(A-\sigma)F^{-1}(1/(A-\sigma);\rho_{\alpha\beta}(\ln\mu)+\varepsilon)\}.$$

Нехай тепер $n(t)$ – числена функція послідовності (λ_n), а

$$q_{\alpha\beta}(f) = \underline{\lim_{t\to\infty}}\, \alpha(t)/\beta(t/\ln n(t)), \quad \rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \alpha(t)/\beta(t/\ln n(t)).$$

Наступна теорема доповнює теорему 2.

Теорема 3. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і виконуються умови /6/. Тоді $\forall q \in (0,1)$ і $\forall \varepsilon > 0$ при $\sigma_0(\varepsilon) \le \sigma < A$ наявна нерівність

$$M(\sigma) \le \mu(\sigma + q(A-\sigma))\{3 + \exp\{q(A-\sigma)F^{-1}(1/(qA-q\sigma);\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon)\}\}.$$

Істотною умовою в теоремі 2 є перша з умов /6/, з якої випливає, що $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to \infty$. Постає питання: чи можна одержати відповідні оцінки, якщо співвідношення $\alpha(x) = O(\beta(x))$ не виконується? З огляду на це наведемо наступну теорему.

Теорема 4. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і для кожного $c \in (0,\infty)$ при $x \to \infty$ виконується

$$x/F^{-1}(x;c)\uparrow\infty, \quad \beta(x/F^{-1}(x;c)) \sim \beta(x). \qquad /7/$$

Тоді, якщо $\rho_{\alpha\beta}(f) < \infty$ і для кожного $\gamma > \rho_{\alpha\beta}(f)$ виконується

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \ln n / F^{-1}(\lambda_n,\gamma) < \infty,$$

$\forall \varepsilon > 0$ при $\sigma_0(\varepsilon) \le \sigma < A$ є нерівність

$$M(\sigma) \le \mu(\sigma)\exp\{F^{-1}(1/(A-\sigma);\rho_{\alpha\beta}(\ln\mu)+\varepsilon)\}.$$

Нехай

$$q^*_{\alpha\beta}(f) = \underline{\lim_{t\to\infty}}\, \alpha(\ln n(t))/\beta(t), \quad \rho^*_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \alpha(\ln n(t))/\beta(t).$$

Аналогом теореми 3 є така теорема.

Теорема 5. Якщо $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і виконуються умови /7/, то $\forall q \in (0,1)$ і $\forall \varepsilon > 0$ при $\sigma_0(\varepsilon) \le \sigma < A$ виконується

$$M(\sigma) \le \mu(\sigma + q(A-\sigma))\left\{3 + \exp\left\{F^{-1}\left(1/(qA-q\sigma); \rho^*_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon\right)\right\}\right\}.$$

Безпосереднім наслідком наведених вище теорем є теорема 6.

Теорема 6. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$. Тоді:

а/ якщо виконується умова /4/, то $\lambda_{\alpha\beta}(f) = \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu)$ і $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$;

б/ коли виконані умови теореми 2, то $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$;

в/ якщо виконані умови теореми 3, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \le \rho_{\alpha\beta}(f) \le$

$$\le \max\{\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho_{\alpha\beta}(f)\}, \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \le \lambda_{\alpha\beta}(f) \le \max\{\lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho_{\alpha\beta}(f)\};$$

г/ коли виконані умови теореми 4, то $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$;

д/ якщо виконані умови теореми 5, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \le \rho_{\alpha\beta}(f) \le$

$$\le \max\{\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho^*_{\alpha\beta}(f)\}, \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \le \lambda_{\alpha\beta}(f) \le \max\{\lambda_{\alpha\beta}(f), \rho^*_{\alpha\beta}(f)\}.$$

Наступна теорема засвідчує, що оцінки у твердженнях в/ і д/ теореми 6, взагалі кажучи, поліпшити не можна.

Теорема 7. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і $|a_n| \exp\{A\lambda_n\} \ge c > 0$ при $n \ge 1$. Тоді, якщо виконуються умови /6/, $\lambda_{\alpha\beta}(f) \ge q_{\alpha\beta}(f)$, а коли виконуються умови /7/, то $\lambda_{\alpha\beta}(f) \ge q^*_{\alpha\beta}(f)$.

З теореми 7 видно, що коли $a_n = e^{-A\lambda_n}$, виконуються умови /6/, а послідовність (λ_n) вибрана так, що $q_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(f)$, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) = 0$, а $\rho_{\alpha\beta}(f) \ge \rho_{\alpha\beta}(f)$ і за теоремою 6 /твердження в/ $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(f)$ /. Аналогічно доводиться, що твердження д/ теореми 6 поліпшити не можна.

Список літератури: 1. Г а л ь Ю.М., Ш е р е м е т а М.М. Про ріст аналітичних у півплощині функцій, заданих рядами Діріхле. – ДАН УРСР, сер. А, 19[illegible] № 12. 2. Д а г е н е Э.Я. О центральном показателе ряда Дирихле. – Литовск. матем.сб., 1968, т.8, № 3.

Стаття надійшла в редколегію 10.II.1978 р.