УДК 517.53

М.М.Шеремета

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО РОСТУ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай f - ціла функція, задана абсолютно збіжним в усій площині рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad z=x+iy, \qquad /1/$$

де $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$, $M(x)=\sup\{|f(x+iy)|:|y|<\infty\}$, $m(x)=\inf\{|f(x+iy)|:|y|<\infty\}$, а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/. Вкажемо на зв"язки між ростом величин $M(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ і $\lambda_\nu(x)$ для цілих функцій /1/, які задовольняють умову

$$\ln M(x)\le Ax^{\rho}, \quad 1<\rho<2, \qquad /2/$$

при всіх досить великих x. Наведені тут теореми доповнюють результати статей [1, 2].

Надалі через C_0 позначатимемо довільну вимірну множину з $]-\infty,\infty[$ таку, що $\int_{C_0\cap[0,x]} dx=o(x)$ при $x\to\infty$.

Теорема 1. Нехай для функції /1/ виконується /2/ і

$$\varlimsup_{n\to\infty} \ln n/\ln\lambda_n\le\beta<1/(\rho-1).$$

Тоді для кожних $\varepsilon>0$ і $\eta\in]0,(1-\beta(\rho-1))/\rho[$ виконується $M(x)\le\mu(x)\left(1+\lambda_{\nu+1}^{\beta+\varepsilon}\exp\{-l_\nu\lambda_\nu^{\eta/(\rho-1)}\}\right)$ для всіх x зовні деякої множини C_0, де $l_\nu=\min\{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1},\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu\}$ і $\nu=\nu(x)$.

Теорема 2. Нехай для функції /1/ виконується /2/ і $\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge h>0$, $n\ge 0$. Тоді для кожного $\eta\in]0,\frac{2-\rho}{\rho}[$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $M(x)\le\mu(x)(1+\exp\{-\lambda_\nu^{\eta/(\rho-1)}\})$.

Теорема 3. При виконанні умов теореми 2 для кожного $\eta\in]0,(2-\rho)/\rho[$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $m(x)\ge M(x)(1-\exp\{-\lambda_\nu^{\eta/(\rho-1)}\})$.

Теорема 4. Нехай для функції /1/ виконується /2/ та $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq \lambda_n^{-\alpha}$ при $n \geq n_0$ і деякому $\alpha < (2-\rho)/(\rho^2-1)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $m(x) \geq (1-\varepsilon) M(x)$.

Список літератури: 1. Шеремета М.Н. Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле. - ДАН СССР, 1978, т.240, № 5. 2. Шеремета М.М. Застосування методу Вімана-Валірона до рядів Діріхле. - ДАН УРСР, сер. А, 1979, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.1979 р.

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

ПРО ДІЙСНІ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай f - ціла функція порядку ρ, а $\omega(r)$ - число точок на $\{z : |z| = r\}$, в яких $\operatorname{Im} f = 0$. А.О.Гельфонд [2] показав, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \ln \omega(r) / \ln r = \rho.$$

Ми узагальнюємо цей результат на випадок узагальнених порядків. Через Λ позначимо кла неперервних додатних на $[a, \infty]$, $a > 0$, функцій α таких, що $\alpha(x) \uparrow \infty$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \to \infty$ для кожного $c \in (0, \infty)$.

Теорема 1. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і $\alpha(\alpha^{-1}(\beta(x)) \ln x) \sim \beta(x)$ при $x \to \infty$. Тоді

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \alpha(\omega(r)) / \beta(r) = \rho_{\alpha\beta}(f),$$

де $\rho_{\alpha\beta}(f)$ - узагальнений порядок функції f, визначений рівністю [1]

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \alpha(\ln M(r,f)) / \beta(r).$$

Доведення цієї теореми базується на формулі

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \alpha(n(r, a, f)) / \beta(r) = \rho_{\alpha\beta}(f) \qquad /1/$$