Теорема 4. Нехай для функції /1/ виконується /2/ та $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq$ $\geq \lambda_n^{-\alpha}$ при $n \geq n_0$ і деякому $\alpha < (2-\rho)/(\rho^2-1)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $m(x) \geq (1-\varepsilon) M(x)$.

Список літератури: 1. Шеремета М.Н. Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле. - ДАН СССР, 1978, т.240, № 5. 2. Шеремета М.М. Застосування методу Вімана-Валірона до рядів Діріхле. - ДАН УРСР, сер. А, 1979, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.1979 р.

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

ПРО ДІЙСНІ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай f - ціла функція порядку ρ, а $\omega(r)$ - число точок на $\{z: |z| = r\}$, в яких $\operatorname{Im} f = 0$. А.О.Гельфонд [2] показав, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \ln \omega(r) / \ln r = \rho.$$

Ми узагальнюємо цей результат на випадок узагальнених порядків. Через Λ позначимо клас неперервних додатних на $[a, \infty]$, $a > 0$, функцій α таких, що $\alpha(x) \uparrow \infty$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \to \infty$ для кожного $c \in (0, \infty)$.

Теорема 1. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і $\alpha(\alpha^{-1}(\beta(x)) \ln x) \sim \beta(x)$ при $x \to \infty$. Тоді

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \alpha(\omega(r)) / \beta(r) = \rho_{\alpha\beta}(f),$$

де $\rho_{\alpha\beta}(f)$ - узагальнений порядок функції f, визначений рівністю [1]

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \alpha(\ln M(r,f)) / \beta(r).$$

Доведення цієї теореми базується на формулі

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \alpha(n(r,a,f)) / \beta(r) = \rho_{\alpha\beta}(f) \qquad /1/$$

для всіх $a \in C$ за винятком, можливо, одного, де $n(r, a, f)$ – число a – точок функції f в $\{z : |z| \leq r\}$. Рівність /I/ доводимо за допомогою методів розподілу значень. Дальше доведення теореми проводимо аналогічно доведенню відповідної теореми з праці [3].

Оскільки універсальної шкали росту цілих функцій побудувати не можна, корисною може бути наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\Phi(x) = \ln M(e^x, f)$, а φ – функція, обернена до Φ. Тоді якщо

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \ln^{-2} x \ln \Phi(x) = \infty,$$

то $\overline{\lim_{r \to \infty}} \varphi(\omega(r)) / \ln r = 1$

Список літератури: I. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. – Изв. вузов. Математика, 1967, № 2. 2. Gelfond A.O. Über die harmonischen Functionen – Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова, 1934, т.5. 3. Hellerstein S., Korevaar J. The real values of an entire function.– Bull. Amer. Math. Soc., 1964, v. 70.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 517.537.6

М.М.Хом"як

ТЕОРЕМА ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = x + iy$ – ціла функція, задана абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^z, \quad a_1 = 1. \qquad /I/$$

$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : |y| < \infty\}$, а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /I/.