для всіх $a \in C$ за винятком, можливо, одного, де $n(r, a, f)$ – число a – точок функції f в $\{z : |z| \le r\}$. Рівність /I/ доводимо за допомогою методів розподілу значень. Дальше доведення теореми проводимо аналогічно доведенню відповідної теореми з праці [3].

Оскільки універсальної шкали росту цілих функцій побудувати не можна, корисною може бути наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\Phi(x) = \ln M(e^{x}, f)$, а φ – функція, обернена до Φ. Тоді якщо

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \ln^{-2} x \ln \Phi(x) = \infty,$$

то $\overline{\lim_{r \to \infty}} \varphi(\omega(r)) / \ln r = 1$

Список літератури: I. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. – Изв. вузов. Математика, 1967, № 2. 2. Gelfond A.O. Über die harmonischen Functionen – Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова, 1934, т.5. 3. Hellerstein S., Korevaar J. The real values of an entire function. – Bull. Amer. Math. Soc., 1964, v.70.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 517.537.6

М.М.Хом"як

ТЕОРЕМА ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = x + iy$ – ціла функція, задана абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{z}, \quad a_1 = 1. \qquad /I/$$

$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : |y| < \infty\}$, а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /I/.

Верхньою щільністю dE вимірної множини $E\subset(-\infty,\infty)$ називається величина

$$dE = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{m(E\cap[0,x])}{x}, \quad mE = \int\limits_{E\cap[0,\infty)} dx \quad .$$

Через E_q позначаємо довільну множину, верхня щільність якої не перевищує $q\in[0,1]$.

Ми вже розглядали клас функцій /I/, які задовольняють умову

$$\ln M(x) \le Ax^p, \quad 1<p<\infty, \quad 0<A<\infty, \qquad /2/$$

і встановили [2], що для цього класу функцій, кожного $q\in(0,1)$ та $B>\frac{1}{2}\left(q^{2-2p}A^2p^{3p-2}(p-1)^{2-p}\right)^{1/p}$ і для всіх x зовні деякої множини E_q виконується

$$M(x) \le 2\sqrt{\pi B}\,\mu(x)\{\ln\mu(x)\}^{\frac{p-2}{2p}} \exp\left\{D(\ln\mu(x))^{\frac{p-1}{p}} + B(\ln\mu(x))^{\frac{p-2}{p}}\right\}, \qquad /3/$$

де $D = \left(q^{1-p}Ap^{2p-1}(p-1)^{1-p}\right)^{1/p}$.

Зараз проаналізуємо ширший клас функцій /I/, а саме функції нульового порядку за Ріттом. При цьому використаємо результати і метод з праці [3].

Ріст $M(x)$ порівнюємо з додатною і випуклою на $(-\infty,\infty)$ функцією $\Phi(x)$, яка прямує до 0 при $x\to\infty$ [3]. Через $\varphi(x)$ позначаємо функцію, обернену до $\Phi(x)$, а через $\varphi'(x)$ – її правосторонню похідну.

Безпосереднім наслідком теореми 3 праці [3] є наступна лема.

Л е м а I. Нехай функція /I/ задовольняє умову

$$\ln M(x) \le \Phi(x). \qquad /4/$$

Тоді для кожного $q\in[0,1]$, всіх $n\ge 1$ та x зовні деякої множини E_q виконується

$$|a_n|n^x \le \mu(x)\exp\left\{-\frac{q}{2}\varphi_1'(\max(\ln n, \ln\nu))\ln^2\frac{n}{\nu}\right\}, \qquad /5/$$

де $\varphi_1(x)=\varphi(x)$ при $x\ge x_0$ і $\varphi_1(x)=\frac{x}{x_0}\varphi(x_0)$ при $0\le x\le x_0$, а $x_0>0$ – довільна точка, для якої $\varphi(x_0)>0$.

Л е м а 2. Для того щоб функція /I/ мала нульовий порядок за Ріттом, необхідно і досить, щоб існувала функція $\Phi(x)$, яка задовольняє /4/ і умову

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = 0. \qquad /6/$$

Д о в е д е н н я . Справді, з умови /6/ випливає, що для функції /I/ порядок за Ріттом $\rho_R = 0$. Нехай тепер для цілої функції /I/ порядок за Ріттом $\rho_R = 0$. Тоді [I] існує такий уточнений порядок $\rho_R(x)$, що

$$\rho_R(x) \to 0, \quad x\rho_R'(x)\ln x \to 0, \; x \to +\infty,$$

і
$$\ln\ln M(x) \leq x\rho_R(x), \quad x \geq x_0.$$

Візьмемо $\Phi(x) = e^{x\rho_R(x)}, \; x \geq x_0$. Маємо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \to \infty} (\rho_R(x) + x\rho_R'(x)) = 0$$

, тобто виконується /6/.

Теорема I. Нехай функція /I/ задовольняє умову /4/ з $\Phi(x)$, яка задовольняє /6/. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ та $q \in (0,1)$ і всіх x зовні деякої множини E_q виконується

$$M(x) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{q}}\,(1+\varepsilon)\,\nu(x)\,\frac{\exp\left\{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu + k(\ln\nu))}\right\}}{\sqrt{\varphi'(\ln\nu + k(\ln\nu))}}\,\mu(x), \qquad /7/$$

де

$$k(x) = \sqrt{\frac{ax}{\varphi'((1+\varepsilon)x)}}, \qquad a > \frac{2}{q}. \qquad /8/$$

Д о в е д е н н я . З умови /6/ випливає, що $x\varphi'(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, отже $k(x) = O(x), \; x \to \infty$. Нехай η – довільне фіксоване число, $0 < \eta < \min(\varepsilon, \frac{qa}{2} - 1)$. Згідно з лемою I, для всіх x зовні деякої множини E_q маємо

$$\frac{M(x)}{\mu(x)} \leq \frac{1}{\mu(x)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^x \leq \sum_{n<\nu} \exp\left\{-q\varphi(\ln\nu)\frac{\ln^2\frac{n}{\nu}}{2}\right\} +$$

$$+1+\Big(\sum_{\nu<n<\nu e^{k(\ln\nu)}} + \sum_{\nu\cdot e^{k(\ln\nu)}\le n<\nu^{1+\eta}} +$$

$$+\sum_{n\ge \nu^{1+\eta}}\Big)\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln n)\ln^2\frac{n}{\nu}\Big\} = 1+\sum_{i=1}^{4} \sigma_i(x). \qquad /9/$$

Оцінюючи окремо кожний доданок у /9/, записуємо

$$\sigma_1(x) = \sum_{n<\nu}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln\nu)\ln^2\frac{n}{\nu}\Big\} \le \int_1^{\nu}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln\nu)\ln^2\frac{u}{\nu}\Big\}du =$$

$$= \nu\int_{-\ln\nu}^{0}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln\nu)t^2+t\Big\}dt \le \nu\int_{-\infty}^{0}\exp\Big\{-\Big(\sqrt{\frac{q\varphi'(\ln\nu)}{2}}\,t-\sqrt{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu)}}\Big)^2+$$

$$+\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu)}\Big\}dt = \nu\cdot e^{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu)}}\sqrt{\frac{2}{q\varphi'(\ln\nu)}}\times\int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu)}}} e^{-t^2}dt =$$

$$= \nu(1+o(1)),\quad x\to\infty \qquad /I0/$$

Аналогічно

$$\sigma_2(x) = \sum_{\nu<n<\nu e^{k(\ln\nu)}}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln n)\ln^2\frac{n}{\nu}\Big\} \le \sum_{\nu<n<\nu e^{k(\ln\nu)}}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\times$$

$$\times\,\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))\ln^2\frac{n}{\nu}\Big\} \le \frac{\nu\cdot e^{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))}}}{\sqrt{\frac{q}{2}\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{q\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))}}\;\nu(x)\cdot e^{\frac{1}{2q\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))}}. \qquad /II/$$

Далі, враховуючи /8/, маємо

$$\sigma_3(x) = \sum_{\nu\cdot e^{k(\ln\nu)}\le n<\nu^{1+\eta}}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln n)\ln^2\frac{n}{\nu}\Big\} \le \sum_{\nu e^{k(\ln\nu)}\le n<\nu^{1+\eta}}\exp\Big\{-\frac{q}{2}\times$$

$$\times\,\varphi'((1+\eta)\ln\nu)k^2(\ln\nu)\Big\} \le \nu^{-\frac{q}{2}\varphi'((1+\eta)\ln\nu)\frac{k^2(\ln\nu)}{\ln\nu}+1+\eta} =$$

$$= \nu^{-\frac{q}{2}a\frac{\varphi((1+\eta)\ln\nu)}{\varphi'((1+\varepsilon)\ln\nu)}+1+\eta} \le \nu^{-\frac{qa}{2}+1+\eta} = o(1),\quad x\to\infty. \qquad /I2/$$

І, нарешті, враховуючи, що $x\varphi'(x) \to \infty$, дістаємо

$$\sigma_4(x) = \sum_{n \geq \nu^{1+\eta}} \exp\left\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln n)\ln^2\frac{n}{\nu}\right\} \leq \sum_{n \geq \nu^{1+\eta}} \exp\left\{-\frac{q}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\,\varphi'(\ln n)\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2 \ln^2 n\right\} \leq \sum_{n \le \nu^{1+\eta}} n^{-\frac{q}{2}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^2\varphi'(\ln n)\ln n} = O(1),\ x\to\infty \qquad /13/$$

Об"єднуючи /10/ – /13/ і враховуючи, що $\dfrac{e^{1/(2q\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu)))}}{\sqrt{\varphi'(\ln\nu+k(\ln\nu))}}$ монотонно зростаюча функція, отримуємо /7/.

Зауважимо, що при додатковій умові

$$\varphi'((1+o(1))x) \sim \varphi'(x),\ x\to\infty, \qquad /14/$$

і при умовах теореми І одержуємо, що для всіх x зовні деякої множини E_q

$$M(x) \leq \mu(x)\,\nu(x)\exp\left\{\frac{1+o(1)}{2q\varphi'(\ln\nu(x))}\right\},\ x\to\infty \qquad /15/$$

Нехай $\Psi(x) = \int_0^x t\varphi_1'(t)\,dt$. Враховуючи, що $t\varphi_1'(t) > 0$ і згідно /6/ $t\varphi_1'(t) \to \infty$ при $t\to\infty$, маємо $\Psi(x)$ – монотонно зростає до ∞ при $x\to\infty$. Через $\Psi^{-1}(x)$ позначимо функцію, обернену до $\Psi(x)$. Тоді $\Psi^{-1}(x) > 0$ при $x > 0$ і $\Psi^{-1}(x)$ монотонно прямує до ∞ при $x\to\infty$.

Т е о р е м а 2. Нехай виконуються умови теореми І і умова /14/. Тоді для кожного $q\in(0,1)$ і для всіх x зовні множини E_q виконується

$$M(x) \leq \mu(x)\exp\left\{\Psi^{-1}\left(\frac{\ln\mu(x)}{q}\right) + \frac{1+\varepsilon}{2q\varphi'\left(\Psi^{-1}\left(\frac{\ln\mu(x)}{q}\right)\right)}\right\}. \qquad /16/$$

Приклад функції

$$f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(\ln\ln n)^2} n^z \qquad /17/$$

вказує на точність оцінок /15/ і /16/.

Для функції /17/ виконується співвідношення

$$M(x)=\sqrt{\frac{\pi}{e}}\,\frac{1+o(1)}{\sqrt[4]{x}}\exp\left\{2e^{\sqrt{x+2}-1}\left(\sqrt{x+2}-1\right)+\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right\},$$

отже, виконується /4/ з $\Phi(x)=2(1+\varepsilon)\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x+2}-1}$, яка задовольняє /6/, /14/ та $\psi^{-1}(x)\sim\frac{x}{2\ln x}$. Крім цього, для функції /17/ маємо

$$\mu(x)=(1+o(1))\exp\left\{2e^{\sqrt{x+1}-1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right\},$$

$$\nu(x)=\exp\left\{e^{\sqrt{x+1}-1}\right\}+\alpha(x),\quad |\alpha(x)|\le 1/2,$$

і

$$M(x)=\begin{cases}\mu(x)\,\nu(x)\exp\left\{(1+o(1))\dfrac{\ln\nu(x)}{4\ln\ln\nu(x)}\right\},\\ \mu(x)\exp\left\{\dfrac{\ln\mu(x)}{2\ln\ln\mu(x)}+(1+o(1))\dfrac{\ln\mu(x)}{4\ln^2\ln\mu(x)}\right\}.\end{cases}$$

Висловлюємо подяку М.М.Шереметі за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. 2. Хом'як М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 16. 3. Шеремета М.Н. Метод Вимана - Валирона для рядов Дирихле. УМЖ, 1978, т.30, № 4.

Стаття надійшла в редколегію 2.02.1979 р.

УДК 517.535.4

А.А.Кондратюк

ДВІ ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(r)$ - додатна, неспадна, неперервна, необмежена на $]0,\infty[$ функція, яка називається функцією росту, Λ - клас мероморфних функцій скінченного λ -типу [8]. Припускаємо, що існує