Для функції /17/ виконується співвідношення

$$M(x)=\sqrt{\frac{\pi}{e}}\,\frac{1+o(1)}{\sqrt[4]{x}}\exp\left\{2e^{\sqrt{x+2}-1}\left(\sqrt{x+2}-1\right)+\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right\},$$

отже, виконується /4/ з $\Phi(x)=2(1+\varepsilon)\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x+2}-1}$, яка задовольняє /6/, /14/ та $\psi^{-1}(x)\sim\frac{x}{2\ln x}$. Крім цього, для функції /17/ маємо

$$\mu(x)=(1+o(1))\exp\left\{2e^{\sqrt{x+1}-1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right\},$$

$$\nu(x)=\exp\left\{e^{\sqrt{x+1}-1}\right\}+\alpha(x),\quad |\alpha(x)|\le 1/2,$$

і

$$M(x)=\begin{cases}\mu(x)\,\nu(x)\exp\left\{(1+o(1))\dfrac{\ln\nu(x)}{4\ln\ln\nu(x)}\right\},\\ \mu(x)\exp\left\{\dfrac{\ln\mu(x)}{2\ln\ln\mu(x)}+(1+o(1))\dfrac{\ln\mu(x)}{4\ln^2\ln\mu(x)}\right\}.\end{cases}$$

Висловлюємо подяку М.М.Шереметі за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Хом"як М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій, заданих рядами Діріхле. – Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 16. 3. Шеремета М.Н. Метод Вимана – Валирона для рядов Дирихле. УМЖ, 1978, т.30, № 4.

Стаття надійшла в редколегію 2.02.1979 р.

УДК 517.535.4

А.А.Кондратюк

ДВІ ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(r)$ – додатна, неспадна, неперервна, необмежена на $]0,\infty[$ функція, яка називається функцією росту, Λ – клас мероморфних функцій скінченного λ -типу [8]. Припускаємо, що існує стала $M>0$ така, що для всіх $r>0$ виконується $\lambda(2r)\le M\lambda(r)$. Тоді через Λ^0 позначимо клас мероморфних функцій цілком регулярного росту [2], $\Lambda^0\subset\Lambda$.

Нехай Z та W - відповідно послідовності нулів і полюсів функції $f\in\Lambda$. $s(r,\varphi)-s(r,0)$ - кількість нулів функції f у секторі $\{z: 0<\arg z\le\varphi, |z|\le r\}$, помножена на 2π, де $0<\varphi\le 2\pi$. Рівність

$$s(r,\varphi+2\pi)-s(r,\varphi)=s(r,2\pi)-s(r,0) \qquad /I/$$

визначає при будь-яких виборах значень $s(r,0)$ і при кожному $r>0$ клас неспадних неперервних справа функцій від $\varphi\in R$ які вважаємо еквівалентними і позначаємо також через $s(r,\varphi)=$ $=s(r,\varphi,Z)$. Аналогічно визначаємо $s(r,\varphi,W)$.

Приймемо

$$S(r,\varphi)-S(r,0)=\int_0^r\frac{s(t,\varphi)-s(t,0)}{t}dt,$$

$$\sigma(r,\varphi)=S(r,\varphi,Z)-S(r,\varphi,W),$$

$$N_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\varphi}d\sigma(r,\varphi),\ k\in Z.$$

Нехай $\rho(r)$ - деякий уточнений порядок [3], $\rho(r)\to\rho>0$ при $r\to\infty$.

О з н а ч е н н я I. Пара (Z,W) має усереднену кутову щільність /відносно $r^{\rho(r)}$ /, якщо існує функція $\sigma(\varphi)$ обмеженої варіації на $[0,2\pi]$ така, що

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\|\sigma(r,\varphi)-\sigma(\varphi)\|=0,$$

де

$$\|\sigma\|=\max_{a\in R}\min_{c\in R}\int_a^{a+2\pi}|\sigma(\varphi)+c|d\varphi, \qquad /2/$$

і σ продовжена на R за допомогою умови /I/.

Теорема I. Нехай $\lambda(r)=r^{\rho(r)}$, $f\in\Lambda$. Для того щоб $f\in\Lambda^0$ при нецілому ρ, необхідно і досить, щоб пара (Z,W) мала усереднену кутову щільність, а при цілому ρ, крім того, має існувати границя

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\theta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \qquad /3/$$

Д о в е д е н н я . Нехай X - лінійний простір неперервних справа і обмеженої варіації функцій на $[0,2\pi]$. Продовжимо їх на R за допомогою умови /I/. Функції F та G з X вважаємо еквівалентними, якщо $F(x)-G(x)\equiv const$.

Введемо на X норму співвідношенням /2/ [6]. Коефіцієнти Фур"є-Стільтьєса функції $F\in X$ позначаємо через

$$N_k^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\,dF_n(\varphi),\quad k\in Z.$$

Використовуємо наступне твердження, доведене Леві [6].

Л е м а I. Нехай (F_n) - послідовність з X, для якої існує стала $K>0$ така, що для всіх $n\in N$ виконується

$$\int_0^{2\pi} |dF_n(\varphi)|\le K. \qquad /4/$$

Для того щоб послідовність (F_n) збігалась до нуля по нормі простору X, необхідно і досить, щоб для кожного $k\in Z$ виконувалось

$$\lim_{n\to\infty} N_k^n=0.$$

За умов теореми I критерієм належності функції f до класу Λ^0 /див. [2], теорема I0/ є у випадку нецілого ρ умова існування границь

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} N_k(r)=\Delta_k,\quad k\in Z, \qquad /5/$$

а у випадку цілого ρ, крім того, умова /3/. Зі співвідношення $f\in\Lambda$ очевидна [2, 7] умова /4/ для сім"ї $\{r^{-\rho(r)}\sigma(r,\varphi)\}$, $r>0$. Звідси, та з /5/ за лемою 2 з праці [2] випливає існування функції $\sigma(\varphi)\in X$, коефіцієнти Фур"є-Стільтьєса якої суміщаються з Δ_k, $k\in Z$. Для довільної послідовності (r_n), $r_n\to\infty$, позначимо

$$F_n(\varphi) = r_n^{-\rho(r_n)} \, \sigma(r_n, \varphi) - \sigma(\varphi).$$

З леми I та /5/ одержуємо тепер теорему I.

Через Λ^{0+} позначимо підклас класу Λ^{0} мероморфних функцій з додатними нулями та полюсами. Клас Λ^{0+} називається нетривіальним, якщо в ньому існує функція з відмінним від тотожного нуля індикатором [2]. Позначимо

$$\lambda_1(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\, d\tau,$$

$$\varkappa^2 = \varliminf_{r\to\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r) \le \varlimsup_{r\to\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r) = \rho^2.$$

Теорема 2. Для того щоб клас Λ^{0+} при $\rho>0$ був нетривіальним, необхідно і досить

$$\lambda(r) = r^{\rho} L(r), \qquad /6/$$

де $L(r)$ - повільно змінна функція в сенсі Карамати [5], тобто для кожного $C>0$ виконується

$$\lim_{r\to\infty} L(Cr)/L(r) = 1. \qquad /7/$$

Доведення. Достатність очевидна, бо при виконанні /6/ нетривіальність Λ^{0+} добре відома [2, 3].

Припустимо тепер, що існує функція $f_0 \in \Lambda^{0+}$ з відмінним від тотожного нуля індикатором. Тоді $\varkappa = \rho$, бо в протилежному випадку для двох нецілих ω_1, ω_2, $\varkappa \le \omega_1 < \omega_2 \le \rho$, із зображення для індикатора $h(\theta, f_0)$ випливало б [2]

$$h(\theta, f_0) = A_1 \cos \omega_1(\theta-\pi) = A_2 \cos\omega_2(\theta-\pi), \quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$A_1 \ne 0$, $A_2 \ne 0$, що неможливо. Необхідність випливає з наступної леми.

Лема 2. Для того щоб функція росту $\lambda(r)$ зображалась у вигляді /6/, де L задовольняє умову /7/, необхідно і досить $\varkappa = \rho$.

Це твердження було висловлене М.В.Говоровим.

Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Якщо позначити $\lambda_1(e^x) = y(x)$, то легко зауважити, що рівність $\mathcal{X} = \rho$ перепишеться у вигляді

$$y'' - [\rho^2 + o(1)]y = 0, \quad (x \to +\infty).$$

Оскільки $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то враховуючи відомі результати [I, 4, 7], одержуємо $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$,

$$a \neq 0, \ y_1'/y_1 \to \rho, \ y_2'/y_2 \to -\rho \quad \text{при } x \to +\infty .$$

Звідси легко випливає /6/.

Ми вдячні А.А.Гольдбергу та О.Е.Єременку, які допомогли спростити початкове доведення леми 2.

Список літератури: I. Б е л л м а н Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1954. 2. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. - Математический сборник, 1978, 106, № 3. 3. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. 4. С а н с о н е Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1954, Т.2. 5. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière des fonctions.— Mathematica (Cluj), 1930, 4. 6. Lévy P. L'espace de répartitions linéaires.— Bull. des Sciences Math., 1938, 62. 7. Perron O. Ueber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhängige Variable reelle ist.- Journ. für die reine und ang. Math., 1913, 142. 8. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions.— Bull. Soc. Math. France, 1968, 96.

Стаття надійшла в редколегію 13.03.1979 р.

УДК 517.574

А.А.Кондратюк

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(r)$ - додатна, неспадна, неперервна на $]0,\infty[$ функція, $\lambda(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, яка називається функцією росту.